Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2026. Том 34. № 1. С. 18–38

УДК 512.743.7 https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1-18-38
EDN: CBBMGE

ВЕРЕТЕНООБРАЗНОСТЬ СИСТЕМ ВЕСОВ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП МАЛОГО РАНГА И РЕГУЛЯРНЫЕ УНИПОТЕНТНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

А. А. Осиновская

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
e-mail: anna@im.bas-net.by

Поступила: 09.04.2026 **Исправлена:** 08.05.2026 **Принята:** 29.05.2026

Ключевые слова: классические линейные группы, представления, унипотентные элементы, регулярные унипотентные элементы, блоки Жордана.

Аннотация. Рассматриваются неприводимые представления простых алгебраических групп над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Для групп типа A_2, A_3 и C_2 получено обобщение знаменитой теоремы Дынкина о веретенообразности системы весов. Это позволило описать Жорданову нормальную форму унипотентных элементов в неприводимых представлениях таких групп, точнее определить размерности всех блоков Жордана образов унипотентных элементов без нахождения количества этих блоков.

THE SPINDLE PROPERTY OF WEIGHT SYSTEMS OF REPRESENTATIONS OF SMALL RANK ALGEBRAIC GROUPS AND REGULAR UNIPOTENT ELEMENTS

A. A. Osinovskaya

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
e-mail: anna@im.bas-net.by

Received: 09.04.2026 **Revised:** 08.05.2026 **Accepted:** 29.05.2026

Keywords: classical linear groups, representations, unipotent elements, regular unipotent elements, Jordan blocks.

Abstract. We study irreducible representations of simple algebraic groups over the field $\mathbb{C}$ of complex numbers. For groups of type A_2, A_3 and C_2 a generalization of the famous Dynkin theorem on the spindle property of the weight system is obtained. This has made it possible to describe the Jordan normal form of unipotent elements in irreducible representations of such groups, i. e., to determine the dimensions of all Jordan blocks of the images of unipotent elements without finding the number of these blocks.

1. Введение

Пусть G – простая односвязная алгебраическая группа над $\mathbb{C}$. Обозначим символами $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ базис системы корней группы G относительно фиксированного максимального тора $T \subset G$ и подгруппы Бореля $B \supset T$, $\omega_1, \ldots, \omega_r$ – соответствующие этому базису фундаментальные веса. Пусть V – неприводимый конечномерный модуль группы G, он однозначно определяется своим старшим весом ω, $\mathcal{X}$ – множество всех весов модуля V. Тогда

$$\omega = a_1\omega_1 + \ldots + a_r\omega_r,$$

а произвольный вес $\lambda \in \mathcal{X}$ можно записать в виде

$$\lambda = \omega - k_1\alpha_1 - \ldots - k_r\alpha_r,$$

где $a_1, \ldots, a_r, k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{N}$ (множество всех неотрицательных целых чисел) [1, §12]. Разделим $\mathcal{X}$ на уровни

$$L_i = \{\lambda \in \mathcal{X} \mid k_1 + \ldots + k_r = i\}.$$

Всюду далее n – индекс последнего уровня в $\mathcal{X}$, $a = [n/2]$ (целая часть числа $n/2$), S_i – сумма кратностей весов на уровне L_i. Если m_λ – кратность веса λ, то

$$S_i = \sum_{\lambda \in L_i} m_\lambda.$$

Справедлива знаменитая теорема Дынкина о «веретенообразности» систем весов.

Теорема 1.1 [2].

$$S_i = S_{n-i}$$

для $0 \leqslant i \leqslant n$ *и*

$$S_{i-1} \leqslant S_i,$$

для $1 \leqslant i \leqslant a$.

В. Кац [3, предложение 10.10] доказал формулу для размерностей уровней:

$$\sum_{i \geqslant 0} S_i q^i = \prod_{\alpha \in \Phi_+^*} \frac{1 - q^{\langle \omega + \rho, \alpha \rangle}}{1 - q^{\langle \rho, \alpha \rangle}}. \tag{1}$$

Здесь q – независимая переменная, Φ_+^* – множество всех положительных корней дуальной системы корней, ρ – полусумма положительных корней, а $\langle \rho, \alpha \rangle$ – значение веса ρ на корне α.

Из этой формулы сразу же следует, что

$$n = \begin{cases} 2a_1 + 2a_2, & G = SL_3(\mathbb{C}); \\ 3a_1 + 4a_2 + 3a_3, & G = SL_4(\mathbb{C}); \\ 3a_1 + 4a_2, & G = Sp_4(\mathbb{C}). \end{cases}$$

Мы доказали следующую теорему.

Теорема 1.2. *Пусть V – неприводимый конечномерный модуль над алгебраической группой G типа A_2, C_2 или A_3 со старшим весом ω. Тогда*

$$S_{i-1} < S_i$$

для $1 \leqslant i \leqslant a$, *за исключением следующих случаев, когда* $S_{i-1} = S_i$.

(i) $G = SL_3(\mathbb{C})$,

1. $a_1 a_2 = 0$, $i = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$;
2. $a_1 a_2 \neq 0$ *и по крайней мере одно из них нечетно,* $i = a$;
3. $a_1 a_2 \neq 0$ *и оба четны,* $i = a - 1$.

(ii) $G = SL_4(\mathbb{C})$, *тройки* (a_1, a_2, a_3) *и уровни i перечислены в табл.* 1.

(iii) $G = Sp_4(\mathbb{C})$, *пары* (a_1, a_2) *и уровни i перечислены в табл.* 2.

Теорема 1.2 позволяет найти размерности блоков Жордана унипотентных элементов в представлениях таких групп. Заметим, что каждый унипотентный элемент $u \in G$ лежит в некоторой замкнутой в топологии Зарисского подгруппе $SL_2(\mathbb{C})$ (или, иначе говоря, A_1-подгруппе), причем для фиксированного u такая подгруппа единственна с точностью до сопряжения (это следует из теоремы Джекобсона–Морозова для алгебр Ли [4, гл. VIII, § 11, предложение 2]). Следовательно, изучение формы Жордана унипотентного элемента в данном представлении сводится к изучению неприводимых компонент его ограничения на подгруппу $SL_2(\mathbb{C})$, т. е. к нахождению так называемых правил ветвления. Очевидно, что для разных вложений $SL_2(\mathbb{C})$ в G получаются разные неприводимые компоненты.

Напомним, что подгруппа полупростой алгебраической группы называется подсистемной, если она порождается всеми корневыми подгруппами этой группы, ассоциированными с некоторой подсистемой ее корней. Известные правила ветвления касаются ограничений представлений классических алгебраических групп на подсистемные подгруппы. Они восходят к работам Г. Вейля (для вложений специальных линейных групп [5]) и Ф. Мурнагана (для вложений специальных ортогональных и симплектических групп [6]). Д. Литтлвуд [7] нашел правила ветвлений для естественных вложений групп Sp_n и SO_n в GL_n.

Существует еще один важный класс подгрупп простых алгебраических групп, не являющихся подсистемными, – так называемые главные A_1-подгруппы (подгруппы типа A_1, содержащие регулярный унипотентный элемент). В статье М. Либека, Г. Зейца и Д. Тестерман [8] классифицированы все неприводимые модули простых алгебраических групп, в которых в ограничениях на произвольные A_1-подгруппы (в том числе главные) кратности всех композиционных факторов равны 1. А. Рицголи и Д. Тестерман [9] получили аналогичный результат для групп над полем K характеристики p большей числа Кокстера h и главных A_1-подгрупп. Однако до сих пор известно очень мало про ограничения на главные A_1-подгруппы даже в случае поля комплексных чисел. Мы описали ограничения на все A_1-подгруппы (и соответственно структуру унипотентных элементов) для произвольных представлений групп типа A_2, A_3 и C_2.

Группа G типа A_2, т. е. $SL_3(\mathbb{C})$, имеет два класса нетривиальных унипотентных элементов. В качестве их представителей можно взять корневой унипотентный элемент u_1, имеющий один блок Жордана размерности 2 и один блок размерности 1, и регулярный унипотентный элемент u_2, имеющий один блок Жордана размерности 3.

Теорема 1.3. (i) *Образ корневого унипотентного элемента в неприводимом представлении группы $SL_3(\mathbb{C})$ со старшим весом $\omega = a_1\omega_1 + a_2\omega_2$ имеет блоки Жордана всех размерностей i при $1 \leqslant i \leqslant a_1 + a_2 + 1$.*

(ii) *Образ регулярного унипотентного элемента имеет блоки Жордана в точности следующих размерностей:*

1. $1 \leqslant i \leqslant 2a_1 + 2a_2 + 1$, *где* $i \equiv 2a_1 + 2a_2 + 1 (\bmod 4)$, *если* $a_1a_2 = 0$;
2. $3, 5, \ldots, 2a_1 + 2a_2 + 1$, *если* $a_1a_2 \neq 0$ *и по крайней мере одно из них нечетно;*
3. $1, 5, \ldots, 2a_1 + 2a_2 + 1$ *(отсутствует только* 3*), если* $a_1a_2 \neq 0$ *и оба являются четными.*

Группа $G = SL_4(\mathbb{C})$ имеет четыре класса сопряженности неединичных унипотентных элементов. В качестве их представителей можно взять корневой унипотентный элемент u_1, имеющий один блок Жордана размерности 2 и два блока размерности 1; элемент u_2, имеющий два блока размерности 2; u_3, имеющий один блок размерности 3 и один блок размерности 1; а также регулярный унипотентный элемент u_4 с одним блоком Жордана размерности 4.

Обозначим символом V^* модуль, дуальный к V. Форма Жордана унипотентных элементов одинакова для V и V^*. Старший вес модуля V^* равен $\omega^* = a_3\omega_1 + a_2\omega_2 + a_1\omega_3$. Следовательно, в дальнейшем можно предполагать, что $a_1 \geqslant a_3$.

Таблица 1. **Список исключительных a_1, a_2, a_3 для $SL_4(\mathbb{C})$, где $a_1 \geqslant a_3$**

a_1	a_2	a_3	i, для которых $S_{i-1} = S_i$	Размерности отсутствующих блоков Жордана
1	0	0	1	$3a_1 + 4a_2 + 3a_3 - 1 = 2$
$1(\bmod 2) > 1$	0	0	$1, a$	$3a_1 + 4a_2 + 3a_3 - 1$, 2
2	0	0	$1, a$	$3a_1 + 4a_2 + 3a_3 - 1 = 5$, 1
$2(\bmod 4) > 2$	0	0	$1, a-2, a$	$3a_1 + 4a_2 + 3a_3 - 1$, 5, 1
$0(\bmod 4)$	0	0	$1, a-1$	$3a_1 + 4a_2 + 3a_3 - 1$, 3
0	1	0	1	$3a_1 + 4a_2 + 3a_3 - 1 = 3$
0	> 1	0	$1, a-1$	$3a_1 + 4a_2 + 3a_3 - 1$, 3
$1(\bmod 4)$	0	1	a	1
$0(\bmod 4) > 0$	0	2	a	1
2	> 0	0	a	1
$2(\bmod 4) > 2$	2	0	a	1
$2(\bmod 4) > 2$	1	0	a	1
1	1	1	a	1

Теорема 1.4. (i) *Образ корневого унипотентного элемента в неприводимом представлении группы $SL_4(\mathbb{C})$ со старшим весом $\omega = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3$ имеет блоки Жордана всех размерностей i при $1 \leqslant i \leqslant a_1 + a_2 + a_3 + 1$.*

(ii) *Образ унипотентного элемента с двумя блоками Жордана размерности 2 имеет блоки всех размерностей $i \equiv a_1 + 2a_2 + a_3 + 1 (\bmod 2)$ при $1 \leqslant i \leqslant a_1 + 2a_2 + a_3 + 1$.*

(iii) *Образ унипотентного элемента с блоками Жордана размерностей 3 и 1 имеет блоки всех размерностей $i \equiv 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 1 (\bmod 2)$ при $1 \leqslant i \leqslant 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 1$, за исключением случая $a_1 = a_3 = 0$, $a_2 \equiv 1 (\bmod 2)$, когда отсутствуют блоки размерности 1.*

(iv) *Образ регулярного унипотентного элемента имеет блоки всех размерностей $i \equiv$ $\equiv 3a_1 + 4a_2 + 3a_3 + 1 (\bmod 2)$ при $1 \leqslant i \leqslant 3a_1 + 4a_2 + 3a_3 + 1$, за исключением троек (a_1, a_2, a_3)*

и размерностей блоков, перечисленных в табл. 1. *В частности, если* $\min\{a_1, a_2, a_3\} > 1$, *то существуют блоки всех возможных размерностей.*

Таблица 2. **Список исключительных a_1, a_2 для $Sp_4(\mathbb{C})$**

a_1	a_2	i, для которых $S_{i-1} = S_i$	Размерности отсутствующих блоков Жордана
$1(\bmod 2) > 1$	0	$1, a$	$3a_1+4a_2-1$, 2
1	$0, 2(\bmod 3)$	a	2
1	$1(\bmod 3)$	$a-1$	4
3	$3(\bmod 6)$	a	2
2	0	$1, a$	$3a_1+4a_2-1 = 5$, 1
$2(\bmod 4) > 2$	0	$1, a-2, a$	$3a_1+4a_2-1$, 5, 1
$0(\bmod 4)$	0	$1, a-1$	$3a_1+4a_2-1$, 3
0	1	$1, a$	$3a_1+4a_2-1 = 3$, 1
0	2	$1, a-1, a$	$3a_1+4a_2-1 = 7$, 3, 1
0	3	$1, a-2, a-1$	$3a_1+4a_2-1 = 11$, 5, 3
0	$0(\bmod 3) > 3$	$1, a-5, a-2, a-1$	$3a_1+4a_2-1$, 11, 5, 3
0	$1, 2(\bmod 3) > 2$	$1, a-3, a-1, a$	$3a_1+4a_2-1$, 7, 3, 1
2	> 0	a	1
$0(\bmod 2) > 2$	1	a	1
$2(\bmod 4) > 2$	2	a	1
6	$1, 2, 4, 5(\bmod 6) > 2$	a	1
4,10	$1, 4(\bmod 6) > 1$	a	1
$2, 6, 10(\bmod 12)$ и > 6	4	a	1

Утверждения (i) теорем 1.3 и 1.4 являются частным случаем следующего более общего результата.

Предложение 1.5. *Образ корневого унипотентного элемента и в неприводимом представлении группы $SL_{r+1}(\mathbb{C})$ со старшим весом $\omega = a_1\omega_1 + \ldots + a_r\omega_r$ имеет блоки Жордана всех размерностей i для $1 \leqslant i \leqslant a_1 + \ldots + a_r + 1$.*

Заметим, что это предложение является непосредственным следствием [10, теорема 1.1].

Наконец, рассмотрим группу типа C_2, т. е. $G = Sp_4(\mathbb{C})$. Она имеет три класса неединичных унипотентных элементов. В качестве их представителей можно взять унипотентный элемент u_1, соответствующий длинному корню, который имеет один блок Жордана размерности 2 и два блока размерности 1; унипотентный элемент u_2, соответствующий короткому корню, который имеет два блока Жордана размерности 2; и регулярный унипотентный элемент u_3 с одним блоком Жордана размерности 3.

Теорема 1.6. (i) *Образ унипотентного элемента, соответствующего длинному корню, в неприводимом представлении алгебраической группы $Sp_4(\mathbb{C})$ со старшим весом $\omega = a_1\omega_1 + a_2\omega_2$ имеет блоки Жордана всех размерностей i при $1 \leqslant i \leqslant a_1 + a_2 + 1$.*

(ii) *Образ унипотентного элемента, соответствующего короткому корню, имеет блоки всех размерностей $i \equiv a_1 + 2a_2 + 1(\bmod 2)$ при $1 \leqslant i \leqslant a_1 + 2a_2 + 1$.*

(iii) *Образ регулярного унипотентного элемента имеет блоки всех размерностей $i \equiv 3a_1 + 4a_2 + 1(\bmod 2)$ при $1 \leqslant i \leqslant 3a_1 + 4a_2 + 1$, за исключением пар (a_1, a_2) и размерностей блоков, перечисленных в табл.* 2. *В частности, если $a_1 > 10$ и $a_2 > 4$, то существуют блоки всех возможных размерностей.*

Заметим, что случай представлений группы типа A_2 уже рассматривался нами в статье [11], но здесь приведено более короткое доказательство.

2. Уровни и унипотентные элементы в A_2

Положим $f_i(q) = 1 + q + q^2 + \ldots + q^i$. Для группы $SL_3(\mathbb{C})$ из формулы (1) получаем

$$\sum_{i\geqslant 0} S_i q^i = \frac{f_{a_1}(q) f_{a_2}(q) f_{a_1+a_2+1}(q)}{1+q}. \tag{2}$$

Из (2) сразу следует, что множество $\mathfrak{X}$ состоит из $2a_1 + 2a_2 + 1$ уровней и что средний уровень имеет индекс $a = a_1 + a_2$. Следовательно, по теореме Дынкина достаточно найти размерности уровней от S_0 до S_a. Положим $S_{-1} = 0$. Вместо того чтобы исследовать, когда коэффициенты ряда (2) совпадают, можно рассмотреть следующий ряд:

$$\sum_{i\geqslant 0} (S_i - S_{i-1}) q^i = \frac{(1-q^{a_1+1}) f_{a_2}(q) f_{a_1+a_2+1}(q)}{1+q} \tag{3}$$

и определить, когда его коэффициенты равны нулю.

Доказательство теоремы 1.2 (*i*). Определим числа b_i для $i \geqslant 0$ с помощью бесконечной последовательности

$$\sum_{i\geqslant 0} b_i q^i = (1 + q^2 + q^4 + \ldots)(1 + q + q^2 + \ldots) \tag{4}$$

и положим $b_i = 0$ для $i < 0$. Анализ различных случаев в (3) показывает, что

$$S_i - S_{i-1} = b_i - b_{i-a_1-1} - b_{i-a_2-1} \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant a.$$

Из (4) следует, что

$$b_i = \begin{cases} [i/2] + 1, & i \geqslant 0; \\ 0, & i < 0, \end{cases} \tag{5}$$

т. е. $(b_i)_{i=-\infty}^{\infty}$ представляет собой следующий ряд

$$\ldots, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, \ldots$$

Отсюда следует искомое. □

Формула Каца позволяет явно записать кратности весов для группы $SL_3(\mathbb{C})$. Это было сделано в [11].

Теорема 1.2(i) и классические правила ветвления позволяют определить структуру унипотентных элементов в неприводимых представлениях группы $SL_3(\mathbb{C})$. Пусть u_1 и u_2 – корневой и регулярный унипотентный элемент, рассмотренные во введении. Как отмечалось выше, $u_i \in H_i$, где $H_i \subset SL_3(\mathbb{C})$ – подгруппа типа A_1. Она является единственной с точностью до сопряжения. Обозначим символом $V|H_i$ ограничение G-модуля V на H_i. Поскольку максимальный тор подгруппы H_i одномерен, можно отождествить множество всех весов этой подгруппы с множеством целых чисел $\mathbb{Z}$, а множество доминантных весов – с $\mathbb{N}$. Блоки Жордана размерности $k+1$ в форме Жордана для u_i находятся во взаимно однозначном соответствии с неприводимыми компонентами веса k в модуле $V|H_i$. Следовательно, если мы хотим определить размерности блоков Жордана для u_i, достаточно найти старшие веса неприводимых компонент модуля $V|H_i$. Заметим, что это не определяет полностью Жорданову форму регулярных унипотентных элементов (т. е. мы находим только размерности блоков Жордана без учета их кратностей), поскольку кратность определяется числом $S_i - S_{i-1}$, а в теореме 1.2(i) найдено лишь, когда оно равно нулю, а когда будет ненулевым.

Рассмотрим произвольную простую алгебраическую группу G и ее регулярный унипотентный элемент u. Он лежит в замкнутой в топологии Зарисского A_1-подгруппе H.

Лемма 2.1. *Пусть V – неприводимый G-модуль со старшим весом ω. Тогда модуль $V|H$ имеет неприводимые компоненты со старшими весами $n - 2i$, где $0 \leqslant i \leqslant a$ и $S_i - S_{i-1} > 0$. Кроме того, число неприводимых компонент со старшим весом $n - 2i$ равно $S_i - S_{i-1}$.*

Доказательство. Из [8, раздел 2] следует, что все метки на помеченной диаграмме Дынкина регулярного унипотентного элемента равны 2 и существует максимальный тор $T_H \subseteq H$, такой, что $T_H \subseteq T$ и гомоморфизм $\tau : \mathfrak{X} \to \mathbb{Z}$, определенный ограничением весов с T на T_H, отображает все веса α_i в 2. Обозначим $\tau(\omega) = x$. Тогда для произвольного веса $\lambda = \omega - k_1\alpha_1 - \ldots - k_r\alpha_r$ модуля V имеем

$$\lambda \mapsto x - 2(k_1 + \ldots + k_r).$$

Эта формула означает, что векторы с весами, лежащими на одном и том же уровне модуля V, соответствуют векторам с одинаковыми весами в модуле $V|H$. Неприводимый H-модуль со старшим весом k является прямой суммой одномерных весовых пространств для следующих весов

$$k, k-2, \ldots, -(k-2), -k.$$

Отсюда получаем, что $x = n$, кратность веса $n - 2(k_1 + \ldots + k_r)$ в $V|H$ равна $S_{k_1+\ldots+k_r}$, а разность $S_i - S_{i-1}$ $(0 \leqslant i \leqslant a)$ является числом неприводимых компонент со старшим весом $n - 2i$ для модуля $V|H$. Если $S_i = S_{i-1}$, то компонента со старшим весом $n - 2i$ отсутствует. $\square$

Применяя лемму к алгебраической группе $SL_3(\mathbb{C})$ и регулярному унипотентному элементу u_2 и учитывая, что в данном случае $n = 2a_1 + 2a_2$, получаем пункт (ii) теоремы 1.3.

3. Уровни в C_2

Исследование представлений группы типа C_2 будет проводиться по той же схеме, что и для A_2. Однако поскольку данная система корней сложнее, формула для уровней не позволяет быстро ответить на вопрос, когда $S_i = S_{i-1}$. Поэтому приходится разделить доказательство на случаи в зависимости от значения веса ω и использовать рекурсию.

3.1. Формула для уровней

Используем формулу Каца. Для группы типа C_2 она принимает вид

$$\sum_{i \geqslant 0} S_i q^i = \frac{f_{a_1}(q) f_{a_2}(q) f_{a_1+a_2+1}(q) f_{a_1+2a_2+2}(q)}{(1+q)(1+q+q^2)}. \tag{6}$$

Из (6) сразу следует, что множество $\mathfrak{X}$ состоит из $3a_1 + 4a_2 + 1$ уровней и что средний уровень имеет индекс $a = [3a_1/2] + 2a_2$. Сначала рассмотрим случаи, когда a_1 или a_2 малы. Затем рассмотрим случай, когда выражение

$$P(q) = \frac{f_{a_1}(q) f_{a_2}(q) f_{a_1+a_2+1}(q)}{(1+q)(1+q+q^2)}$$

является многочленом от q и, наконец, случай, когда $P(q)$ не является многочленом.

Положим $S_{-1} = 0$. Как и в случае с A_2, часто удобно рассматривать разности $S_i - S_{i-1}$

$$\sum_{i \geqslant 0} (S_i - S_{i-1}) q^i = \frac{(1 - q^{a_1+1}) f_{a_2}(q) f_{a_1+a_2+1}(q) f_{a_1+2a_2+2}(q)}{(1+q)(1+q+q^2)} \tag{7}$$

и выяснять, когда они равны нулю.

3.2. Случай $a_1 = 0$

Рассмотрение случаев с малыми значениями коэффициентов аналогично доказательству теоремы 1.2(i). Подставляя $a_1 = 0$ в формулу (7), получаем

$$\sum_{i \geqslant 0} (S_i - S_{i-1}) q^i = \frac{(1 - q^{a_2+1}) f_{a_2+1}(q) f_{2a_2+2}(q)}{(1+q)(1+q+q^2)}.$$

Определим целые числа b_i для $i \geqslant 0$ с помощью бесконечного ряда

$$\sum_{i \geqslant 0} b_i q^i = (1 + q^2 + q^4 + \ldots)(1 + q^3 + q^6 + \ldots) \tag{8}$$

и положим $b_i = 0$ для $i < 0$. Умножая скобки в (8), получаем

$$b_i = \begin{cases} [i/6] + 1, & i \not\equiv 1 (\bmod\ 6), \quad i \geqslant 0; \\ (i-1)/6, & i \equiv 1 (\bmod\ 6), \quad i \geqslant 0; \\ 0, & i < 0, \end{cases} \tag{9}$$

т. е. $(b_i)_{i=-\infty}^{\infty}$ представляет собой следующий ряд:

$$\ldots,0,0,0,0,1,0,1,1,1,1,2,1,2,2,2,2,3,2,3,3,3,3,4,3,4,4,4,4,\ldots$$

С помощью индукции легко видеть, что

$$S_i - S_{i-1} = b_i - b_{i-a_2-1} - b_{i-a_2-2} \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant a = 2a_2. \tag{10}$$

Формула (10) означает, что если $0 \leqslant i \leqslant a_2$, то равенство $S_i = S_{i-1}$ выполняется только для $i = 1$. Пусть $a_2 + 1 \leqslant i \leqslant a = 2a_2$. Используя (10), получаем, что $S_{i-1} = S_i$ в точности в следующих случаях:

1. $a_2 \equiv 0 \pmod 3$, $i = 2a_2 - 5$, $i = 2a_2 - 2$, $i = 2a_2 - 1$;
2. $a_2 \equiv 1,2 \pmod 3$, $i = 2a_2 - 3$, $i = 2a_2 - 1$, $i = 2a_2$.

Поэтому

$$\begin{aligned}
&S_0 = S_1,\ S_{a-1} = S_a && \text{при } a_2 = 1,\\
&S_0 = S_1,\ S_{a-2} = S_{a-1} = S_a && \text{при } a_2 = 2,\\
&S_0 = S_1,\ S_{a-3} = S_{a-2} = S_{a-1} && \text{при } a_2 = 3,\\
&S_0 = S_1,\ S_{a-6} = S_{a-5},\ S_{a-3} = S_{a-2} = S_{a-1} && \text{при } a_2 \equiv 0 \pmod 3 > 3,\\
&S_0 = S_1,\ S_{a-4} = S_{a-3},\ S_{a-2} = S_{a-1} = S_a && \text{при } a_2 \equiv 1,2 \pmod 3 > 2.
\end{aligned}$$

Во всех остальных случаях $S_{i-1} < S_i$.

3.3. Случай $a_2 = 0$

Подставляя $a_2 = 0$ в формулу (7), получаем

$$\sum_{i\geqslant 0}(S_i - S_{i-1})q^i = \frac{(1-q^{a_1+1})f_{a_1+1}(q)f_{a_1+2}(q)}{(1+q)(1+q+q^2)}.$$

Определим числа b_i так же, как и ранее. По индукции получаем

$$S_i - S_{i-1} = b_i - b_{i-a_1-1} - b_{i-a_1-2} - b_{i-a_1-3} \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant a = [3a_1/2]. \tag{11}$$

Легко проверить, что если $0 \leqslant i \leqslant a_1$, то равенство $S_i = S_{i-1}$ выполняется только для $i = 1$. Пусть $a_1 + 1 \leqslant i \leqslant a = [3a_1/2]$ (это возможно для $a_1 \geqslant 2$). Теперь, используя (11), видим, что $S_i = S_{i-1}$ в точности в следующих случаях:

1. $a_1 \equiv 0 \pmod 4$, $i = 3a_1/2 - 1$;
2. $a_1 \equiv 2 \pmod 4$, $i = 3a_1/2 - 2$, $i = 3a_1/2$;
3. $a_1 \equiv 1 \pmod 2 > 1$, $i = 3a_1/2 - 1/2$.

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&S_0 = S_1,\ S_{a-2} = S_{a-1} && \text{при } a_1 \equiv 0 \pmod 4,\\
&S_0 = S_1,\ S_{a-3} = S_{a-2}, S_{a-1} = S_a && \text{при } a_1 \equiv 2 \pmod 4 > 2,\\
&S_0 = S_1,\ S_{a-1} = S_a && \text{при } a_1 = 2 \text{ или } a_1 \equiv 1 \pmod 2 > 1,\\
&S_0 = S_1 && \text{при } a_1 = 1.
\end{aligned}$$

Во всех остальных случаях $S_{i-1} < S_i$.

3.4. Случай $a_1 = 1$, $a_2 > 0$

В данном случае формула (7) имеет вид

$$\sum_{i\geqslant 0}(S_i - S_{i-1})q^i = \frac{(1-q^{a_2+1})f_{a_2+2}(q)f_{2a_2+3}(q)}{1+q+q^2}.$$

Положим

$$b_i = \begin{cases} [i/3]+1, & i \geqslant 0;\\ 0, & i < 0.\end{cases}$$

По индукции получаем

$$S_i - S_{i-1} = b_i - b_{i-a_2-1} - b_{i-a_2-3} \text{ при } 0 \leqslant i \leqslant a = 2a_2 + 1. \tag{12}$$

Для $0 \leqslant i \leqslant a_2$ кратности уровней не могут совпадать. Пусть $a_2 + 1 \leqslant i \leqslant a = 2a_2 + 1$. Подставляя значения b_i в формулу (12), получаем, что $S_i = S_{i-1}$ тогда и только тогда, когда:

1. $a_2 \equiv 0, 2 \pmod 3$, $i = 2a_2 + 1$;
2. $a_2 \equiv 1 \pmod 3$, $i = 2a_2$.

Следовательно

$$\begin{aligned} &S_{a-1} = S_a && \text{при } a_2 \equiv 0, 2 \pmod 3 > 0,\\ &S_{a-2} = S_{a-1} && \text{при } a_2 \equiv 1 \pmod 3. \end{aligned}$$

3.5. Случай $a_2 = 1$, $a_1 > 1$

Подставляя $a_2 = 1$ в формулу (7), получаем

$$\sum_{i \geqslant 0} (S_i - S_{i-1}) q^i = \frac{(1 - q^{a_1+1}) f_{a_1+2}(q) f_{a_1+4}(q)}{1 + q + q^2}.$$

Предположим, что b_i такие же, как в предыдущем пункте. По индукции получаем

$$S_i - S_{i-1} = b_i - b_{i-a_1-1} - b_{i-a_1-3} - b_{i-a_1-5} \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant a = [3a_1/2] + 2. \tag{13}$$

Из формулы (13) можно заключить, что кратности уровней не могут совпадать для $0 \leqslant i \leqslant a_1$. Пусть $a_1 + 1 \leqslant i \leqslant a = [3a_1/2] + 2$. Используя формулу (13), получаем, что $S_i = S_{i-1}$ тогда и только тогда, когда $a_1 \equiv 0 \pmod 2$, $i = 3a_1/2 + 2$. Следовательно,

$$S_{a-1} = S_a \text{ при } a_1 \equiv 0 \pmod 2.$$

В остальных случаях $S_{i-1} < S_i$.

3.6. Случай $a_1 = 2$, $a_2 > 1$

Формула (7) приводит к следующему выражению:

$$\sum_{i \geqslant 0} (S_i - S_{i-1}) q^i = \frac{(1 - q^{a_2+1}) f_{a_2+3}(q) f_{2a_2+4}(q)}{1 + q}.$$

Определим b_i как в формуле (5). Тогда для $0 \leqslant i \leqslant a = 2a_2 + 3$

$$S_i - S_{i-1} = b_i - b_{i-a_2-1} - b_{i-a_2-4} \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant a = 2a_2 + 3. \tag{14}$$

Из этого следует, что для $0 \leqslant i \leqslant a_2$ кратности уровней не могут совпадать. Пусть $a_2 + 1 \leqslant i \leqslant$ $\leqslant a = 2a_2 + 3$. Используя формулу (14), легко доказать, что

$$S_{a-1} = S_a,$$

а в остальных случаях $S_{i-1} < S_i$.

3.7. Случай $a_2 = 2$, $a_1 > 2$

Из формулы (7) следует, что

$$\sum_{i \geqslant 0} (S_i - S_{i-1}) q^i = \frac{(1 - q^{a_1+1}) f_{a_1+3}(q) f_{a_1+6}(q)}{1 + q}.$$

Целые числа b_i такие же, как и в предыдущем пункте. Тогда

$$S_i - S_{i-1} = b_i - b_{i-a_1-1} - b_{i-a_1-4} - b_{i-a_1-7} \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant a = [3a_1/2] + 4. \tag{15}$$

Из (15) и фактов, доказанных в предыдущем пункте, следует, что для $0 \leqslant i \leqslant \min(a_1 + 6, a)$ кратности уровней строго возрастают. Пусть $a_1 + 7 \leqslant i \leqslant a = [3a_1/2] + 4$ (это возможно для $a_1 \geqslant 6$). Используя формулу (15), получаем, что для $a_1 \equiv 2 \pmod 4$

$$S_{a-1} = S_a \text{ при } a_1 \equiv 2 \pmod 4.$$

В других случаях кратности уровней не могут совпадать.

3.8. Случай, когда $a_1 > 2$, $a_2 > 2$ и $P(q)$ – многочлен

Каждому старшему весу $\omega = a_1\omega_1 + a_2\omega_2$ поставим в соответствие пару $(\overline{a}_1, \overline{a}_2)$, где $\overline{a}_i$ – остатки от деления по модулю 6. Легко показать, что $P(q)$ не является многочленом, если

$$(\overline{a}_1, \overline{a}_2) \in \{(0,0),(0,3),(1,1),(1,4),(3,0),(3,3),(4,1),(4,4)\},$$

а в противном случае $P(q)$ является многочленом.

Предположим, что $P(q)$ является многочленом от q. Обозначим его коэффициенты через c_j; тогда

$$P(q) = c_0 + c_1 q + c_{2a_1+2a_2-2} q^{2a_1+2a_2-2}.$$

По определению $P(q)$ имеем

$$c_j = c_{2a_1+2a_2-2-j} \text{ для всех } 0 \leqslant j \leqslant 2a_1+2a_2-2. \tag{16}$$

Кроме того,

$$c_{j-1} \leqslant c_j \text{ для всех } 1 \leqslant j \leqslant a_1+a_2-1. \tag{17}$$

Чтобы показать это, разделим числитель на знаменатель в выражении для $P(q)$. Анализируя значения a_1, a_2 и a_3, получаем, что

$$P(q) = (1+q+q^2+\ldots+q^k)(1+q^2+q^4+\ldots+q^{2l})(1+q^3+q^6+\ldots+q^{3s})$$

для некоторых $k \geqslant 3$, $l,s \geqslant 1$; или

$$\begin{aligned} P(q) &= (1+q+q^2+\ldots+q^k)(1+q+q^2+\ldots+q^l)(1+q^6+q^{12}+\ldots+q^{6s})(1-q+q^2) = \\ &= (1+q+q^2+\ldots+q^k)(1+q^2+q^3+\ldots+q^{l-1}+q^l+q^{l+2})(1+q^6+q^{12}+\ldots+q^{6s}), \end{aligned}$$

где $k,l \geqslant 3$, $s \geqslant 0$. Отсюда следует формула (17). Теперь формула (6) принимает вид

$$\sum_{i \geqslant 0} S_i q^i = (c_0 + c_1 q + c_{2a_1+2a_2-2} q^{2a_1+2a_2-2})(1+q+q^2+\ldots+q^{a_1+2a_2+2}).$$

Пусть $c_j = 0$ для всех $j < 0$ или $j > 2a_1+2a_2-2$. Тогда

$$S_i = c_i + c_{i-1} + \ldots + c_{i-a_1-2a_2-2}.$$

Получаем

$$S_i - S_{i-1} = c_i - c_{i-a_1-2a_2-3}, \tag{18}$$

где $1 \leqslant i \leqslant a = [3a_1/2] + 2a_2$. Пусть $a' = 2a_1+2a_2-2$ и $a'' = a_1+2a_2+3$. Тогда

$$a' > a \geqslant a'' \text{ при } a_1 \geqslant 6,$$

$$a'' \geqslant a' \geqslant a \text{ и } a'' > a \text{ при } 3 \leqslant a_1 \leqslant 5.$$

В последнем случае

$$S_i - S_{i-1} = c_i > 0 \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant a.$$

Следовательно, кратности уровней строго возрастают. Пусть теперь $a_1 \geqslant 6$. Тогда

$$S_i - S_{i-1} = c_i > 0 \text{ при } 1 \leqslant i < a''.$$

Предположим, что $a'' \leqslant i \leqslant a$. Тогда $c_i > 0$ и $c_{i-a_1-2a_2-3} > 0$. Согласно формулам (16) и (18)

$$S_i - S_{i-1} = c_{2a_1+2a_2-2-i} - c_{i-a_1-2a_2-3}.$$

Положим $g(i) = 2a_1+2a_2-2-i$ и $h(i) = i-a_1-2a_2-3$. Имеем

$$g(i-1) = g(i)+1 > g(i) > h(i) > h(i-1) = h(i)-1. \tag{19}$$

Для нечетного a_1 получаем

$$g(a) = a_1/2 - 3/2, \; h(a) = a_1/2 - 7/2. \tag{20}$$

Если a_1 четно, то

$$g(a) = a_1/2 - 2,\ h(a) = a_1/2 - 3. \tag{21}$$

Поскольку $g(i) \leqslant a_1 - 5$, из формулы (17) следует, что

$$c_{g(i-1)} = c_{g(i)+1} \geqslant c_{g(i)} \geqslant c_{h(i)} \geqslant c_{h(i-1)} = c_{h(i)-1}. \tag{22}$$

Чтобы определить, когда $S_{i-1} = S_i$, достаточно найти, когда коэффициенты $c_0, c_1, \ldots, c_{a_1}$ совпадают.

Определим b_j как в формуле (9). Тогда

$$c_j - c_{j-1} = b_j - b_{j-a_2-1} \text{ при } 0 \leqslant j \leqslant a_1. \tag{23}$$

Из формулы (23) вытекает равенство $c_j = c_{j-1}$ в точности в следующих случаях:

1. $j = 1$;
2. $a_2 = 3,\ j \equiv 1 \pmod 3$;
3. $a_2 = 4,\ j \equiv 1,5 \pmod 6$;
4. $a_2 = 6,\ j \equiv 1 \pmod 6$.

Для других значений j коэффициенты строго возрастают.

Используя формулы (19), (20) и (21), мы приходим к выводу, что кратности рассматриваемых уровней строго возрастают для нечетных значений a_1. Для четного a_1 единственное возможное равенство имеет вид

$$S_{a-1} = S_a,$$

если $a_1/2 - 2 = j$ и $c_{j-1} = c_j$.

Чтобы завершить доказательство, рассмотрим 4 случая.

1. $a_1 \geqslant 6,\ a_2 \geqslant 3$ и $a_2 \neq 3,4,6$.

Тогда $S_{a-1} = S_a$ только при $a_1 = 6$. Поскольку $P(q)$ является многочленом, имеем $a_2 \equiv$ $\equiv 1,2,4,5 \pmod 6$.

2. $a_1 \geqslant 6,\ a_2 = 3$.

Если $S_{a-1} = S_a$, то $a_1 \equiv 0 \pmod 6$. Это приводит к противоречию, так как $P(q)$ является многочленом.

3. $a_1 \geqslant 6,\ a_2 = 4$.

Равенство $S_{a-1} = S_a$ выполняется при $a_1 \equiv 2,6 \pmod{12}$.

4. $a_1 \geqslant 6,\ a_2 = 6$.

Тогда $S_{a-1} = S_a$ только при $a_1 \equiv 6 \pmod{12}$. Но это невозможно, поскольку $P(q)$ является многочленом.

3.9. Случай, когда $a_1 > 2$, $a_2 > 2$ и $P(q)$ не является многочленом

В данном случае

$$(\overline{a}_1, \overline{a}_2) \in \{(0,0),(0,3),(1,1),(1,4),(3,0),(3,3),(4,1),(4,4)\},$$

где $\overline{a}_i$ – остатки от деления по модулю 6. Пусть

$$R(q) = \frac{f_{a_2}(q) f_{a_1+a_2+1}(q) f_{a_1+2a_2+2}(q)}{(1+q)(1+q+q^2)}. \tag{24}$$

Для наших значений a_1 и a_2 получается, что

$$R(q) = c_0 + c_1 q + \ldots + c_{2a_1+4a_2} q^{2a_1+4a_2},$$

где c_j – целые числа. Как и выше, из формулы (24) следует, что

$$c_j = c_{2a_1+4a_2-j} \text{ для всех } 0 \leqslant j \leqslant 2a_1 + 4a_2$$

и

$$c_{j-1} \leqslant c_j \text{ для всех } 1 \leqslant j \leqslant a_1 + 2a_2. \tag{25}$$

Теперь формула (6) принимает вид

$$\sum_{i \geqslant 0} S_i q^i = (c_0 + c_1 q + c_{2a_1+4a_2} q^{2a_1+4a_2})(1 + q + q^2 + \ldots + q^{a_1}).$$

Положим $c_j = 0$ для $j < 0$ или $j > 2a_1 + 4a_2$. Тогда

$$S_i = c_i + c_{i-1} + \ldots + c_{i-a_1}.$$

Имеем

$$S_i - S_{i-1} = c_i - c_{i-a_1-1},$$

где $1 \leqslant i \leqslant a = [3a_1/2] + 2a_2$. Очевидно, что

$$2a_1 + 4a_2 > a > a_1 + 1.$$

Для $1 \leqslant i < a_1 + 1$

$$S_i - S_{i-1} = c_i > 0.$$

Предположим, что $a_1 + 1 \leqslant i \leqslant a_1 + 2a_2$, тогда по формуле (25) $S_{i-1} = S_i$, если

$$c_i = c_{i-1} = \ldots = c_{i-a_1-1},$$

т. е. если $a_1 + 2$ соседних коэффициента многочлена $R(q)$ равны.

Пусть $a_1 + 2a_2 < i \leqslant a$, тогда

$$S_i - S_{i-1} = c_{2a_1+4a_2-i} - c_{i-a_1-1}.$$

Положим, что $g(i) = 2a_1 + 4a_2 - i$ и $h(i) = i - a_1 - 1$. Тогда $g(i) < a_1 + 2a_2$, поэтому выполняются неравенства (19) и (22). Предположим, что a_1 нечетно. Тогда

$$g(a) = a_1/2 + 2a_2 + 1/2,\ h(a) = a_1/2 + 2a_2 - 3/2. \tag{26}$$

Если a_1 четно, то

$$g(a) = a_1/2 + 2a_2,\ h(a) = a_1/2 + 2a_2 - 1. \tag{27}$$

Чтобы определить, когда $S_{i-1} = S_i$, рассмотрим $c_0, c_1, \ldots, c_{a_1+2a_2}$ и найдем, когда они совпадают. Определим b_j как в формуле (9). Тогда для $0 \leqslant j \leqslant a_1 + 2a_2$

$$c_j - c_{j-1} = b_j - b_{j-a_2-1} - b_{j-a_1-a_2-2} \text{ при } 0 \leqslant j \leqslant a_1 + 2a_2. \tag{28}$$

Используя формулу (28), несложно заключить, что для $1 \leqslant j \leqslant a_1 + a_2 + 1$ равенство $c_j = c_{j-1}$ выполняется только в следующих случаях:

1. $j = 1$;
2. $a_2 = 3$, $j \equiv 1 \pmod 3$;
3. $a_2 = 4$, $j \equiv 1, 5 \pmod 6$;
4. $a_2 = 6$, $j \equiv 1 \pmod 6$.

Для других значений j коэффициенты строго возрастают.

Чтобы завершить анализ, рассмотрим 8 случаев. Каждый случай исследуется следующим образом: сначала для $a_1 + a_2 + 2 \leqslant j \leqslant a_1 + 2a_2 = a'$ мы находим, когда $c_j = c_{j-1}$; затем, объединяя всю информацию о коэффициентах многочлена $R(q)$, определяем i, для которого $S_i = S_{i-1}$. Используя приведенные выше факты, приходим к выводу, что для $a_1 + 1 \leqslant i \leqslant a_1 + 2a_2$ это возможно тогда и только тогда, когда $c_i = c_{i-1} = \ldots = c_{i-a_1-1}$. Теперь пусть $a_1 + 2a_2 < i \leqslant a$. Рассматривая $i = a$, видим, что $S_{a-1} = S_a$ всякий раз, когда $c_{g(a)} = c_{h(a)}$. Из формулы (22) следует, что $S_i - S_{i-1} \geqslant S_a - S_{a-1}$ для выбранных значений i. Следовательно, мы закончили, если $S_a > S_{a-1}$. В противном случае рассматриваем $i = a - 1$ и так далее.

Предположим, что $a_1 + a_2 + 2 \leqslant j \leqslant a'$.

1. $a_1 \equiv 0 \pmod 6$, $a_2 \equiv 0 \pmod 6$.

Здесь $c_j = c_{j-1}$ только для $j = a' - 5$, $j = a' - 2$ и $j = a' - 1$. Следовательно,

$$c_{a'-3} = c_{a'-2} = c_{a'-1}$$

и для $a_2 \geqslant 12$ также имеем $c_{a'-6} = c_{a'-5}$. Приведенные выше формулы означают, что $a_1 + 2$ соседних коэффициента многочлена $R(q)$ не могут совпадать. Следовательно,

$$S_{i-1} < S_i \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant a_1 + 2a_2.$$

Пусть $a_1+2a_2<i\leqslant a$. Поскольку a_1 четно, из (27) следует, что $S_{a-1}=S_a$ всякий раз, когда $c_{i-1}=c_i$ для $i=g(a)$. Но $g(a)\equiv 0,3\ (\bmod\ 6)$, и для таких значений i получаем $c_{i-1}<c_i$. Поскольку $S_{a-1}<S_a$, из формулы (19) следует, что $S_{i-1}<S_i$ для $a_1+2a_2<i<a$.

2. $a_1\equiv 3\ (\bmod\ 6)$, $a_2\equiv 0\ (\bmod\ 6)$.

Равенство $c_j=c_{j-1}$ выполняется тогда и только тогда, когда $j=a'-8,\ j=a'-4$ или $j=a'$. Следовательно,

$$c_{a'-5}=c_{a'-4},\ c_{a'-1}=c_{a'}$$

и $c_{a'-9}=c_{a'-8}$ для $a_2\geqslant 12$.

Как и в предыдущем случае,

$$S_{i-1}<S_i \text{ при } 1\leqslant i\leqslant a_1+2a_2.$$

Пусть $a_1+2a_2<i\leqslant a$. Поскольку a_1 нечетно, из формулы (26) следует, что $S_{a-1}=S_a$, всякий раз, когда $c_{i-2}=c_{i-1}=c_i$ для $i=g(a)$. Легко показать, что это невозможно для $a_2\geqslant 12$. Поскольку $a'-4\equiv 5\ (\bmod\ 6)$, мы получаем $c_{a'-6}<c_{a'-5}$ для $a_2=6$ и равенство невозможно. Таким образом,

$$S_{i-1}<S_i \text{ при } 1\leqslant i\leqslant a.$$

3. $a_1\equiv 1\ (\bmod\ 6)$, $a_2\equiv 1\ (\bmod\ 6)$

Имеем $c_j=c_{j-1}$ тогда и только тогда, когда $j=a'-5$, $j=a'-2$ и $j=a'-1$. Следовательно,

$$c_{a'-6}=c_{a'-5},\ c_{a'-3}=c_{a'-2}=c_{a'-1}.$$

Для $1\leqslant i\leqslant a_1+2a_2$,

$$S_{i-1}<S_i.$$

Пусть $a_1+2a_2<i\leqslant a$. Поскольку $g(a)\equiv 0,3\ (\bmod\ 6)$, это означает, что $c_{g(a)-1}<c_{g(a)}$. Следовательно,

$$S_{i-1}<S_i \text{ при } 1\leqslant i\leqslant a.$$

4. $a_1\equiv 4\ (\bmod\ 6)$, $a_2\equiv 1\ (\bmod\ 6)$.

Здесь $c_j=c_{j-1}$ всякий раз, когда $j=a'-5$, $j=a'-2$ и $j=a'-1$. Следовательно,

$$c_{a'-6}=c_{a'-5},\ c_{a'-3}=c_{a'-2}=c_{a'-1}.$$

Для $1\leqslant i\leqslant a_1+2a_2$,

$$S_{i-1}<S_i.$$

Пусть $a_1+2a_2<i\leqslant a$. Имеем $g(a)\equiv 1,4\ (\bmod\ 6)$. Из доказанных выше фактов следует, что $c_{g(a)-1}=c_{g(a)}$ только для $a_1=4$ или 10. Таким образом, если $a_1=4,10$, $a_2\equiv 1(\bmod\ 6)>1$, то

$$S_{a-1}=S_a.$$

Поскольку четыре соседних коэффициента c_j не могут совпадать, получаем

$$S_{i-1}<S_i \text{ при } a_1+2a_2<i<a.$$

Для остальных значений a_1, a_2,

$$S_{i-1}<S_i \text{ при всех } 1\leqslant i\leqslant a.$$

5. $a_1\equiv 0\ (\bmod\ 6)$, $a_2\equiv 3\ (\bmod\ 6)$.

Тогда $c_j=c_{j-1}$ тогда и только тогда, когда $j=a'-5$, $j=a'-2$ или $j=a'-1$. Следовательно,

$$c_{a'-2}=c_{a'-1},$$

а для $a_2\geqslant 9$ также $c_{a'-3}=c_{a'-2}$ и $c_{a'-6}=c_{a'-5}$.

Для $1\leqslant i\leqslant a_1+2a_2$,

$$S_{i-1}<S_i.$$

Пусть $a_1+2a_2<i\leqslant a$. Имеем $g(a)\equiv 0,3\ (\bmod\ 6)$. Из этого следует, что $c_{g(a)-1}<c_{g(a)}$. Следовательно,

$$S_{i-1}<S_i \text{ при } 1\leqslant i\leqslant a.$$

6. $a_1 \equiv 3 \pmod 6$, $a_2 \equiv 3 \pmod 6$.
Имеем $c_j = c_{j-1}$ только для $j = a'-5$, $j = a'-2$ и $j = a'-1$. Следовательно,

$$c_{a'-2} = c_{a'-1},$$

а для $a_2 \geqslant 9$ также $c_{a'-3} = c_{a'-2}$ и $c_{a'-6} = c_{a'-5}$.

Для $1 \leqslant i \leqslant a_1 + 2a_2$,

$$S_{i-1} < S_i.$$

Пусть $a_1 + 2a_2 < i \leqslant a$. Имеем $g(a) \equiv 2,5 \pmod 6$. Доказанные выше факты означают, что $c_{g(a)-1} = c_{g(a)}$ только для $a_1 = 3$. В этом случае

$$c_{g(a)-2} = c_{g(a)-1} = c_{g(a)},$$

поскольку $g(a) - 1 \equiv 1 \pmod 3$.

Следовательно,

$$S_{a-1} = S_a \text{ при } a_1 = 3,$$

и

$$S_{i-1} < S_i \text{ для остальных } i < a,$$

поскольку пять соседних коэффициентов $R(q)$ не могут совпадать.

Если $a_1 \geqslant 9$, то

$$S_{i-1} < S_i \text{ для всех } 1 \leqslant i \leqslant a.$$

7. $a_1 \equiv 1 \pmod 6$, $a_2 \equiv 4 \pmod 6$.
Здесь $c_j = c_{j-1}$ всякий раз, когда $j = a'-8$, $j = a'-4$ или $j = a'$. Следовательно,

$$c_{a'-1} = c_{a'},$$

а также $c_{a'-9} = c_{a'-8}$, $c_{a'-5} = c_{a'-4}$ для $a_2 \geqslant 10$.

Для $1 \leqslant i \leqslant a_1 + 2a_2$,

$$S_{i-1} < S_i.$$

Пусть $a_1 + 2a_2 < i \leqslant a$. Имеем $g(a) \equiv 0,3 \pmod 6$. Поскольку $a_1 > 1$, получаем $c_{g(a)-1} < c_{g(a)}$. Таким образом,

$$S_{i-1} < S_i \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant a.$$

8. $a_1 \equiv 4 \pmod 6$, $a_2 \equiv 4 \pmod 6$.
Тогда $c_j = c_{j-1}$ только для $j = a'-5$, $j = a'-2$ и $j = a'-1$. Следовательно,

$$c_{a'-3} = c_{a'-2} = c_{a'-1},$$

а также $c_{a'-6} = c_{a'-5}$ для $a_2 \geqslant 10$.

Для $1 \leqslant i \leqslant a_1 + 2a_2$,

$$S_{i-1} < S_i.$$

Пусть $a_1 + 2a_2 < i \leqslant a$. Имеем $g(a) \equiv 1,4 \pmod 6$. Из доказанных выше фактов следует, что $c_{g(a)-1} = c_{g(a)}$ для $a_1 = 4$, $a_1 = 10$ и для $a_2 = 4$, $a_1 \equiv 10 \pmod{12}$. Следовательно,

$$S_{a-1} = S_a$$

для этих значений a_i. Поскольку четыре соседних коэффициента $R(q)$ не могут совпадать, получаем

$$S_{i-1} < S_i \text{ при } i < a.$$

В остальных случаях

$$S_{i-1} < S_i \text{ для любого } i.$$

На этом доказательство пункта (iii) теоремы 1.2 завершено.

4. Унипотентные элементы в C_2

Согласно классификации унипотентных элементов [12, гл. IV, п. 2.15], элементы являются сопряженными в $Sp_n(\mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда они являются сопряженными в $GL_n(\mathbb{C})$, а элемент $GL_n(\mathbb{C})$ лежит в $Sp_n(\mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда число блоков Жордана размерности k в его форме Жордана является четным для всех нечетных k. Таким образом, существует три класса нетривиальных унипотентных элементов в $Sp_4(\mathbb{C})$. В качестве их представителей можно взять унипотентный элемент u_1, соответствующий длинному корню, унипотентный элемент u_2, соответствующий короткому корню, и регулярный унипотентный элемент u_3. Пусть H_i – подгруппа типа A_1, содержащая унипотентный элемент u_i.

Пункты (i) и (ii) теоремы 1.6 следуют из [10, теорема 1.1]. Для группы $Sp_4(\mathbb{C})$ имеем $n = 3a_1 + 4a_2$. Применяя лемму 2.1, завершаем доказательство теоремы 1.6.

5. Уровни и унипотентные элементы в A_3

Можно было бы анализировать группу типа A_3 как A_2 или C_2, т. е. сначала изучить размерности уровней, а затем с их помощью рассмотреть унипотентные элементы. Однако даже в случае группы типа C_2 такой подход сталкивается со значительными трудностями. Поэтому мы будем рассуждать иначе. Учитывая вложение $SL_3(\mathbb{C})$ и $Sp_4(\mathbb{C})$ в $SL_4(\mathbb{C})$, сначала мы рассмотрим унипотентные элементы в $SL_4(\mathbb{C})$, включая регулярные, а затем отсюда легко получается теорема об уровнях для A_3.

Заметим, что корневые унипотентные элементы уже рассматривались в предложении 1.5.

5.1. Унипотентные элементы с блоками Жордана размерности 3 и 1

В $SL_4(\mathbb{C})$ существует четыре класса унипотентных элементов. Как и выше, пусть H_i – подгруппа типа A_1, содержащая унипотентный элемент u_i. Рассмотрим элемент u_3. Пусть H – подсистемная подгруппа типа A_2, соответствующая корням α_1 и α_2. Тогда мы можем выбрать H_3 таким образом, чтобы

$$H_3 \subset H \subset SL_4(\mathbb{C}).$$

Ограничение $V|H$ известно. Согласно правилам ветвления [13, §6.1] оно состоит из неприводимых компонент со старшими весами

$$\lambda = (b_1 - b_2)\omega_1 + (b_2 - b_3)\omega_2,$$

где b_i – целые числа, такие, что

$$a_1 + a_2 + a_3 \geqslant b_1 \geqslant a_2 + a_3 \geqslant b_2 \geqslant a_3 \geqslant b_3 \geqslant 0.$$

Используя теорему 1.3 (ii), можно найти неприводимые компоненты ограничения $V|H_3$. Когда мы ограничиваем неприводимый $SL_3(\mathbb{C})$-модуль $L(\lambda)$ со старшим весом λ на H_3, все неприводимые компоненты имеют четные старшие веса, и вес $2(b_1 - b_3)$ является максимальным среди них. Для ограничения $V|H_3$ это максимальное значение равно $2a_1 + 2a_2 + 2a_3$ при $b_1 = a_1 + a_2 + a_3$, $b_3 = 0$. Положим

$$\begin{gathered} b_1^0 = a_1 + a_2 + a_3,\ b_2^0 = a_3,\ b_3^0 = 0, \\ \lambda_0 = (b_1^0 - b_2^0)\omega_1 + (b_2^0 - b_3^0)\omega_2 = (a_1 + a_2)\omega_1 + a_3\omega_2 \end{gathered}$$

и рассмотрим различные случаи.

1. Пусть $a_1 + a_2 = 0$, $a_3 > 0$.

Ограничение $L(\lambda_0)|H_3$ имеет компоненты со старшими весами $i \equiv 2a_3 \pmod 4$, $0 \leqslant i \leqslant 2a_3$. Положим

$$b_1 = a_1 + a_2 + a_3,\ b_2 = a_3,\ b_3 = 1.$$

Тогда

$$\lambda = (b_1 - b_2)\omega_1 + (b_2 - b_3)\omega_2 = (a_1 + a_2)\omega_1 + (a_3 - 1)\omega_2,$$

и $L(\lambda)|H_3$ дает компоненты со старшими весами $i \equiv 2a_1+2a_2+2a_3-2 \pmod 4$, $0 \leqslant i \leqslant 2a_1+2a_2+2a_3-2$. Таким образом, мы получили все компоненты с четными старшими весами j при $0 \leqslant j \leqslant 2a_1+2a_2+2a_3$.

2. Предположим, что $a_1+a_2>0$, $a_3=0$.
Модуль $L(\lambda_0)|H_3$ дает компоненты со старшими весами $i \equiv 2a_1+2a_2 \pmod 4$, $0 \leqslant i \leqslant 2a_1+2a_2$. В этом случае всегда выполняется $b_3=0$.

Если $a_1 \neq 0$, то

$$b_1=a_1+a_2+a_3-1,\ b_2=a_3,\ b_3=0.$$

Получаем

$$\lambda=(a_1+a_2-1)\omega_1,$$

и модуль $L(\lambda)|H_3$ дает недостающие компоненты.

Предположим, что $a_1=0$. Тогда b_i может принимать только следующие значения:

$$b_1=a_2,\ b_3=0,\ b_2=k,\ 0 \leqslant k \leqslant a_2.$$

Следовательно, вес λ имеет следующий вид:

$$\lambda=(a_2-k)\omega_1+k\omega_2.$$

Для $k=a_2$ модуль $L(\lambda)$ не дает никаких новых компонент. Таким образом, для $a_2=1$ отсутствует компонента со старшим весом 0. Если a_2 четно, то, положив $k=1$, получаем компоненты со старшими весами

$$2,4,6,\ldots,2a_2-2,2a_2, \tag{29}$$

т. е. в ограничении $L(\lambda)|H_3$ есть все компоненты с четными старшими весами j, $0 \leqslant j \leqslant 2a_1+2a_2+2a_3$.

Если $a_2>1$ – нечетное число, то для $0 \leqslant k \leqslant a_2$ модуль $L(\lambda)$ дает компоненты со старшими весами (29), т. е. все нетривиальные компоненты. Таким образом, для четного a_2 модуль $V|H_3$ имеет все возможные компоненты, а для нечетного a_2 – все компоненты, за исключением тривиальной.

3. Теперь пусть $a_1+a_2>0$, $a_3>0$ и оба четные.
В этом случае $L(\lambda_0)|H_3$ дает компоненты со старшими весами

$$0,4,6,8,\ldots,2a_1+2a_2+2a_3-2,2a_1+2a_2+2a_3,$$

т. е. отсутствует компонента с весом 2. Пусть

$$b_1=a_1+a_2+a_3,\ b_2=a_3,\ b_3=1.$$

Тогда

$$\lambda=(a_1+a_2)\omega_1+(a_3-1)\omega_2,$$

и ограничение $L(\lambda)|H_3$ дает такую компоненту.

4. Пусть $a_1+a_2>0$ и является четным, а a_3 – нечетным.
Ограничение $L(\lambda_0)|H_3$ дает все композиционные факторы модуля $L(\lambda)|H_3$, кроме тривиального. Пусть

$$b_1=a_1+a_2+a_3,\ b_2=a_3,\ b_3=1.$$

Тогда $L(\lambda)|H_3$ дает фактор со старшим весом 0.

5. Предположим, что a_1+a_2 нечетно, $a_3>0$ и четно.
Как и ранее, $L(\lambda_0)|H_3$ дает все возможные ненулевые факторы.

Если $a_1=0$, $a_2,a_3 \neq 0$, рассмотрим дуальный модуль. Мы получаем случай $a_3=0$, $a_1,a_2 \neq 0$, который уже был проанализирован. Таким образом, у нас есть все компоненты с четными старшими весами.

Пусть $a_1>0$. Положив

$$b_1=a_1+a_2+a_3-1,\ b_2=a_3,\ b_3=0,$$

получаем недостающую компоненту.

6. Пусть a_1+a_2 и a_3 – оба нечетные.
Модуль $L(\lambda_0)|H_3$ не дает только тривиальный композиционный фактор. Как и в предыдущем случае, можно предположить, что $a_1>0$. Положим

$$b_1=a_1+a_2+a_3-1,\ b_2=a_3,\ b_3=1.$$

Тогда

$$\lambda=(a_1+a_2-1)\omega_1+(a_3-1)\omega_2$$

и ограничение $L(\lambda)|H_3$ дает компоненту со старшим весом 0.

Таким образом, пункт (iii) теоремы 1.4 доказан.

5.2. Унипотентные элементы с двумя блоками Жордана размерности 2

Можно считать, что

$$u_2\in H_2\subset Sp_4(\mathbb{C}).$$

Рассмотрим ограничение $SL_4(\mathbb{C})$-модуля на $Sp_4(\mathbb{C})$. Согласно правилам ветвления [13, (25.39)], для неприводимого $GL_{2n}(\mathbb{C})$-модуля $L(\omega)$ имеем

$$L(\omega)|Sp_{2n}(\mathbb{C})\cong\bigoplus N_{\lambda\bar{\lambda}}L(\bar{\lambda}),$$

где $L(\bar{\lambda})$ – неприводимые $Sp_{2n}(\mathbb{C})$-модули со старшими весами $\bar{\lambda}$, сумма берется по всем $\bar{\lambda}$ и

$$N_{\lambda\bar{\lambda}}=\sum_{\eta}N_{\eta\bar{\lambda}\lambda},$$

где $N_{\eta\bar{\lambda}\lambda}$ – коэффициенты Литтлвуда–Ричардсона, а сумма берется по всем $\eta=(\eta_1=\eta_2\geqslant\eta_3==\eta_4\geqslant\ldots)$.

Целые числа $N_{\eta\bar{\lambda}\lambda}$ определяются с помощью диаграмм Юнга. Пусть $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$, где $\lambda_1\geqslant\ldots\geqslant\lambda_k$ – неотрицательные целые числа и $d=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k$. Диаграмма Юнга для λ представляет собой следующий набор из d ячеек

λ_1													
λ_2													
$\ldots$													
λ_k													

,

где i-я строка содержит λ_i ячеек, а строки выравниваются по левому краю [13, § 4.1]. Тогда $N_{\eta\bar{\lambda}\lambda}$ – это количество способов, с помощью которых диаграмма Юнга для η может быть расширена до диаграммы Юнга для λ путем строгого $\bar{\lambda}$-расширения. Здесь $\bar{\lambda}$-расширение диаграммы Юнга получается следующим образом: мы добавляем $\bar{\lambda}_1$ ячеек к строкам, причем в одной и той же колонке не может быть двух новых ячеек, помещая в эти ячейки целое число 1; затем мы добавляем $\bar{\lambda}_2$ ячеек и помещаем в них 2 и так далее. Расширение называется строгим, если любое целое число p от 1 до $k-1$ встречается в первых t добавленных ячейках не менее $p+1$ раз. Добавленные ячейки перечисляются справа налево, начиная с верхней строки [13, § A.1].

В нашем случае

$$\eta=(\eta_1,\eta_2),$$

где $a_3\leqslant\eta_1=\eta_2\leqslant a_2+a_3$. Строгое расширение диаграммы Юнга имеет вид

$a_1+a_2+a_3$							1	1	1	1	1	1	1
a_2+a_3							2	2	2	2	2		
a_3	1	1	2	2									

.

Здесь мы добавляем ячейки с 1 в первую строку, ячейки с 2 во вторую строку, а в третью строку сначала все ячейки с 1, а затем с 2. Если $a_3\leqslant a_1$, то третья строка может содержать любое количество единиц от 0 до a_3. Используя дуальный модуль, если это необходимо, мы можем предполагать, что $a_3\leqslant a_1$.

Теперь мы можем записать все значения $\bar{\lambda}$, для которых $N_{\lambda\bar{\lambda}} \neq 0$. Имеем

$$\bar{\lambda}_1 = a_1 + n + k,\ \bar{\lambda}_2 = a_3 + n - k,$$

где $0 \leqslant k \leqslant a_3,\ 0 \leqslant n \leqslant a_2$;

$$\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2) = n_1\omega_1 + n_2\omega_2,$$

где $n_1 = a_1 - a_3 + 2k$, $n_2 = n + a_3 - k$. Для всех таких $\bar{\lambda}$ существует единственное $\eta = \eta_{\bar{\lambda}}$, для которого $N_{\eta_{\bar{\lambda}}\bar{\lambda}\lambda} \neq 0$ и

$$N_{\lambda\bar{\lambda}} = N_{\eta_{\bar{\lambda}}\bar{\lambda}\lambda} = 1.$$

По теореме 1.6 (ii) ограничение $L(\bar{\lambda})|H_2$ разлагается на компоненты со старшими весами $i \equiv n_1 + 2n_2 = a_1 + a_3 + 2n \pmod 2$, $0 \leqslant i \leqslant a_1 + a_3 + 2n$. Но $n \leqslant a_2$. Следовательно, модуль $V|H_2$ содержит в точности компоненты со старшими весами $i \equiv a_1 + 2a_2 + a_3 \pmod 2$, $0 \leqslant i \leqslant a_1 + 2a_2 + a_3$. Пункт (ii) теоремы 1.4 доказан.

5.3. Регулярные унипотентные элементы и уровни

Как и выше, можно считать, что

$$u_4 \in H_4 \subset Sp_4(\mathbb{C}).$$

Для работы с регулярными элементами мы используем приведенные выше результаты об ограничениях $SL_4(\mathbb{C})$-модулей на $Sp_4(\mathbb{C})$ и $Sp_4(\mathbb{C})$-модулей на H_4. Далее мы предполагаем, что $a_3 \leqslant a_1$.

Согласно теореме 1.6 (iii), в ограничении $L(\bar{\lambda})|H_4$ существует композиционный фактор с максимальным старшим весом

$$a = 3n_1 + 4n_2 = 3a_1 + a_3 + 2k + 4n. \tag{30}$$

Выражение (30) принимает максимальное значение, равное $3a_1 + 4a_2 + 3a_3$ для $k = a_3$ и $n = a_2$. Кроме того, из теоремы 1.6 (iii) и формулы (30) следует, что все неприводимые компоненты модуля $V|H_4$ имеют старшие веса одинаковой четности.

Положим

$$\begin{aligned} &n_0 = a_2,\ k_0 = a_3,\\ &n_1^0 = a_1 + a_3,\ n_2^0 = a_2,\\ &\bar{\lambda}_0 = n_1^0\omega_1 + n_2^0\omega_2,\ a_0 = 3a_1 + 4a_2 + 3a_3. \end{aligned}$$

Ограничение $L(\bar{\lambda}_0)|H_4$ дает все неприводимые компоненты со старшими весами $i \equiv a_0 \pmod 2$, $0 \leqslant i \leqslant a_0$, за исключением случаев, перечисленных в табл. 2. Рассмотрим различные возможности для n_1^0 и n_2^0.

1. Пусть $n_1^0 = a_1 + a_3 \equiv 1 \pmod 2 > 1$, $n_2^0 = a_2 = 0$.

В модуле $L(\bar{\lambda}_0)|H_4$ отсутствуют компоненты со старшими весами $a_0 - 2$ и 1. В этом случае $n = 0$.

Если $a_3 = 0$, то $k = 0$. Следовательно, в ограничении $V|H_4$ отсутствуют компоненты со старшими весами $a_0 - 2$ и 1.

Пусть $a_3 > 0$. Положим $k = a_3 - 1$, тогда

$$\begin{aligned} &n_1 = a_1 + a_3 - 2 \equiv 1 \pmod 2,\ n_2 = 1,\\ &\bar{\lambda} = n_1\omega_1 + n_2\omega_2 = (a_1 + a_3 - 2)\omega_1 + \omega_2. \end{aligned}$$

Ограничение $L(\bar{\lambda})|H_4$ дает требуемые компоненты.

2. Предположим, что $a_1 + a_3 = 1$, $a_2 \equiv 0 \pmod 3$.

Имеем $a_1 = 1$, $a_3 = 0$. В $L(\bar{\lambda}_0)|H_4$ отсутствует компонента со старшим весом 1. В этом случае $k = 0$.

Если $a_2 = 0$, то $n = 0$. Следовательно, в $V|H_4$ есть фактор со старшим весом 1.

Пусть $a_2 > 0$. Положим $n = a_2 - 2$, тогда

$$n_1 = 1,\ n_2 = a_2 - 2 \equiv 1 \pmod 3.$$

Ограничение $L(\bar{\lambda}_0)|H_4$ дает требуемую компоненту.

3. Пусть теперь $a_1+a_3=1$, $a_2\equiv 1\ (\bmod\ 3)$.
Как и выше, $a_1=1$, $a_3=0$, $k=0$. В $L(\bar{\lambda}_0)|H_4$ отсутствует компонента со старшим весом 3. Пусть $n=a_2-1$, тогда

$$n_1=1,\ n_2=a_2-1\equiv 0\ (\bmod\ 3).$$

Ограничение $L(\bar{\lambda})|H_4$ дает недостающую компоненту.

4. Пусть $a_1+a_3=1$, $a_2\equiv 2\ (\bmod\ 3)$.
Имеем $a_1=1$, $a_3=0$, $k=0$. В ограничении $L(\bar{\lambda}_0)|H_4$ отсутствует компонента со старшим весом 1. Пусть $n=a_2-1$, тогда

$$n_1=1,\ n_2=a_2-1\equiv 1\ (\bmod\ 3).$$

Ограничение $L(\bar{\lambda})|H_4$ дает искомую компоненту.

5. Предположим, что $a_1+a_3=3$, $a_2\equiv 3\ (\bmod\ 6)$.
В модуле $L(\bar{\lambda}_0)|H_4$ отсутствует компонента со старшим весом 1. Пусть $n=a_2-1$, $k=a_3$, тогда

$$n_1=3,\ n_2=a_2-1\equiv 2\ (\bmod\ 6).$$

Очевидно, $L(\bar{\lambda})|H_4$ имеет фактор со старшим весом 1.

6. Пусть $a_1+a_3=2$, $a_2=0$.
В $L(\bar{\lambda}_0)|H_4$ отсутствуют компоненты со старшими весами a_0-2 и 0. В этом случае $n=0$.

Если $a_1=2$, $a_3=0$, то $k=0$. Следовательно, в ограничении $V|H_4$ отсутствуют компоненты со старшими весами 4 и 0.

Пусть $a_1=a_3=1$. Положим $k=0$, тогда

$$n_1=0,\ n_2=1.$$

Ограничение $L(\bar{\lambda})|H_4$ дает фактор со старшим весом 4. Возможности для k и n исчерпаны. Таким образом, при $a_1=a_3=1$, $a_2=0$ отсутствует компонента со старшим весом 0.

7. Пусть $a_1+a_3\equiv 2\ (\bmod\ 4)>2$, $a_2=0$.
В модуле $L(\bar{\lambda}_0)|H_4$ отсутствуют компоненты со старшими весами a_0-2, 4 и 0. В этом случае $n=0$.

Если $a_3=0$, то $k=0$. Следовательно, в $V|H_4$ отсутствуют факторы со старшими весами a_0-2, 4 и 0.

Пусть $a_3>0$. Положим $k=a_3-1$, тогда

$$n_1=a_1+a_3-2\equiv 0\ (\bmod\ 4)>0,\ n_2=1.$$

Ограничение $L(\bar{\lambda})|H_4$ дает факторы со старшими весами a_0-2 и 4. Таким образом, если $a_3=1$, то отсутствует только тривиальный фактор.

Пусть $a_3>1$. Положим $k=a_3-2$, тогда

$$n_1=a_1+a_3-4\equiv 2\ (\bmod\ 4),\ n_2=2.$$

Ограничение $L(\bar{\lambda})|H_4$ не дает никаких новых компонент. Следовательно, для $a_3=2$ фактор со старшим весом 0 отсутствует.

Пусть $a_3>2$. Положим $k=a_3-3$, тогда

$$n_1=a_1+a_3-6\equiv 0\ (\bmod\ 4),\ n_2=3.$$

Ограничение $L(\bar{\lambda})|H_4$ дает тривиальную компоненту.

8. Теперь пусть $a_1+a_3\equiv 0\ (\bmod 4)$, $a_2=0$.
В $L(\bar{\lambda}_0)|H_4$ отсутствуют компоненты со старшими весами a_0-2 и 2. Имеем $n=0$.

Если $a_3=0$, то $k=0$. Следовательно, в $V|H_4$ отсутствуют факторы со старшими весами a_0-2 и 2.

Пусть $a_3>0$. Положим $k=a_3-1$, тогда

$$n_1=a_1+a_3-2\equiv 2\ (\bmod\ 4),\ n_2=1.$$

Ограничение $L(\bar{\lambda})|H_4$ дает требуемые компоненты.

9. Пусть $a_1+a_3=0$, $a_2=1$.
Тогда $a_1=a_3=k=0$. В ограничении $L(\bar{\lambda}_0)|H_4$ отсутствуют факторы со старшими весами a_0-2 и 0.

Пусть $n = 0$, тогда

$$n_1 = 0,\ n_2 = 0.$$

Ограничение $L(\bar\lambda)|H_4$ дает только тривиальный фактор. Таким образом, в $V|H_4$ отсутствует фактор со старшим весом 2.

10. Предположим, что $a_1 + a_3 = 0$, $a_2 = 2$.
Как и выше, $a_1 = a_3 = k = 0$. В $L(\bar\lambda_0)|H_4$ отсутствуют компоненты со старшими весами $a_0 - 2$, 2 и 0.

Пусть $n = 1$, тогда

$$n_1 = 0,\ n_2 = 1.$$

Ограничение $L(\bar\lambda)|H_4$ новых компонент не дает.

Пусть $n = 0$, тогда

$$n_1 = 0,\ n_2 = 0.$$

Ограничение $L(\bar\lambda)|H_4$ – это тривиальный модуль. Таким образом, в $V|H_4$ отсутствуют компоненты со старшими весами $a_0 - 2$ и 2.

11. Пусть $a_1 + a_3 = 0$, $a_2 = 3$.
Имеем $a_1 = a_3 = k = 0$. В $L(\bar\lambda_0)|H_4$ отсутствуют компоненты со старшими весами $a_0 - 2$, 4 и 2.

Пусть $n = 2$, тогда

$$n_1 = 0,\ n_2 = 2.$$

Ограничение $L(\bar\lambda)|H_4$ дает фактор со старшим весом 4.

Для $n = 1$, $n = 0$ ограничение $L(\bar\lambda)|H_4$ не дает новых компонент. Таким образом, в $V|H_4$ отсутствуют компоненты со старшими весами $a_0 - 2$ и 2.

12. Пусть $a_1 + a_3 = 0$, $a_2 \equiv 0 \pmod 3 > 3$.
Тогда $a_1 = a_3 = k = 0$. В $L(\bar\lambda_0)|H_4$ отсутствуют компоненты со старшими весами $a_0 - 2$, 10, 4 и 2.

Пусть $n = a_2 - 1$, тогда

$$n_1 = 0,\ n_2 = a_2 - 1 \equiv 2 \pmod 3 > 2.$$

Ограничение $L(\bar\lambda)|H_4$ дает факторы со старшими весами 10 и 4. Для остальных значений n ограничения $L(\bar\lambda)|H_4$ не дают новых компонент. Следовательно, в модуле $V|H_4$ отсутствуют компоненты со старшими весами $a_0 - 2$ и 2.

13. Предположим, что $a_1 + a_3 = 0$, $a_2 \equiv 1,2 \pmod 3 > 1$.
Как и выше, $a_1 = a_3 = k = 0$. В $L(\bar\lambda_0)|H_4$ отсутствуют компоненты со старшими весами $a_0 - 2$, 6, 2 и 0.

Пусть $n = a_2 - 1$, если $a_2 \equiv 1 \pmod 3$, и $n = a_2 - 2$ в противном случае. Тогда

$$n_1 = 0,\ n_2 \equiv 0 \pmod 3 > 0.$$

Ограничение $L(\bar\lambda)|H_4$ дает факторы со старшими весами 6 и 0. Для других значений n $L(\bar\lambda)|H_4$ не содержит новых факторов. Таким образом, в $V|H_4$ отсутствуют компоненты со старшими весами $a_0 - 2$ и 2.

14. Пусть $a_1 + a_3 = 2$, $a_2 > 0$.
В модуле $L(\bar\lambda_0)|H_4$ отсутствует тривиальный фактор.

Если $a_1 = 2$, то $a_3 = k = 0$. Легко показать, что тривиальный фактор не может встречаться в $L(\bar\lambda)|H_4$ для любого значения n. Следовательно, он отсутствует и в $V|H_4$.

Пусть $a_1 = a_3 = 1$. Положим $k = a_3 - 1$, $0 \leqslant n \leqslant a_2$, тогда

$$n_1 = 0,\ n_2 = n + 1.$$

Очевидно, что если $a_2 = 1$, то мы не можем получить тривиальный фактор 0. Если $a_2 > 1$, то мы можем получить его, взяв $n = 2$.

Таким образом, для $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ в $V|H_4$ отсутствует тривиальный фактор. Если $a_1 = a_3 = 1$, $a_2 > 1$, то есть все компоненты.

15. Предположим, что $a_1 + a_3 \equiv 0 \pmod 2 > 2$, $a_2 = 1$.
В $L(\bar\lambda_0)|H_4$ отсутствует тривиальный фактор.

Пусть $k = a_3$, $n = 0$, тогда

$$n_1 = a_1 + a_3 \equiv 0 \pmod 2 > 2, \ n_2 = 0.$$

Из этого следует, что если $a_1 + a_3 \equiv 0 \pmod 4$, то $V|H_4$ содержит все возможные факторы.

Пусть $a_1 + a_3 \equiv 2 \pmod 4 > 2$. Если $a_3 = 0$, то $k = 0$. Следовательно, в $V|H_4$ отсутствует тривиальная компонента.

Пусть $a_3 > 0$. Пусть $k = a_3 - 1$, $n = a_2$, тогда

$$n_1 = a_1 + a_3 - 2 \equiv 0 \pmod 4 > 0, \ n_2 = 2.$$

Ограничение $L(\bar{\lambda})|H_4$ дает требуемую компоненту.

16. Пусть $a_1 + a_3 \equiv 2 \pmod 4 > 2$, $a_2 = 2$.
В $L(\bar{\lambda}_0)|H_4$ отсутствует тривиальный фактор.

Если $a_3 = 0$, то $k = 0$. Подставляя $n = 0$, $n = 1$, мы не получаем новых компонент. Следовательно, для $a_3 = 0$ в $V|H_4$ отсутствует тривиальная компонента.

Пусть $a_3 > 0$. Пусть $k = a_3 - 1$, $n = a_2$, тогда

$$n_1 = a_1 + a_3 - 2 \equiv 0 \pmod 4 > 0, \ n_2 = 3.$$

Ограничение $L(\bar{\lambda})|H_4$ дает требуемую компоненту.

17. Наконец, предположим, что $a_1 + a_3 = 6$, $a_2 \equiv 1, 2, 4, 5 \pmod 6 > 2$,
или $a_1 + a_3 \equiv 2, 6, 10 \pmod{12} > 6$, $a_2 = 4$,
или $a_1 + a_3 = 4, 10$, $a_2 \equiv 1, 4 \pmod 6 > 1$.
В модуле $L(\bar{\lambda}_0)|H_4$ тривиальный фактор тоже отсутствует.

Пусть $k = a_3$, $n = 3$, тогда

$$n_1 = a_1 + a_3, \ n_2 = 3,$$

и ограничение $L(\bar{\lambda})|H_4$ дает этот фактор. Следовательно, в $V|H_4$ присутствуют все факторы.

Таким образом, мы рассмотрели все возможные случаи. Теорема 1.4 доказана.

Учитывая, что

$$\omega_1(h_4) = 3, \ \omega_2(h_4) = 4, \ \omega_3(h_4) = 3, \ \omega(h_4) = 3a_1 + 4a_2 + 3a_3$$

и применяя лемму 2.1, мы получаем теорему 1.2 (ii).

Работа выполнена в Институте математики НАН Беларуси в рамках государственной программы научных исследований «Конвергенция–2030», НИР 1.02.1.

Литература

1. *Стейнберг Р.* Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1975. 262 с.
2. *Дынкин Е. Б.* Некоторые свойства системы весов линейного представления полупростой группы Ли // Докл. АН СССР. 1950. Т. 71, № 2. С. 221–224.
3. *Кац В.* Бесконечномерные алгебры Ли. М.: Мир, 1993. 425 с.
4. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли, гл. VII–VIII. М.: Мир, 1978. 342 с.
5. *Вейль Г.* Классические группы. Их инварианты и представления. М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1947. 408 с.
6. *Мурнаган Ф. Д.* Теория представлений групп. М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1950. 487 с.
7. *Littlewood D. E.* On invariant theory under restricted groups // Philos. Trans. Roy. Soc. A. 1944. Vol. 239. P. 387–417. https://doi.org/10.1098/rsta.1944.0003
8. *Liebeck M. W., Seitz G. M., Testerman D. M.* Distinguished unipotent elements and multiplicity-free subgroups of simple algebraic groups // Pacific J. Math. 2015. Vol. 279. P. 357–382. https://doi.org/10.2140/pjm.2015.279.357
9. *Rizzoli A., Testerman D. M.* Multiplicity-free representations of the principal A_1-subgroup in a simple algebraic group // Pacific Journal of Mathematics. 2025. Vol. 336, N 1–2. P. 433–470. https://doi.org/10.2140/pjm.2025.336.433
10. *Osinovskaya A. A.* Restrictions of irreducible representations of classical algebraic groups to

root A_1-subgroups // Commun. in Algebra. 2003. Vol. 31, N 5. P. 2357–2379. https://doi.org/10.1081/AGB-120019001

11. *Осиновская А. А.* Ограничения неприводимых представлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}_3$ на подалгебры типа $\mathfrak{sl}_2$ и структура блоков Жордана нильпотентных элементов // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер фіз.-мат. навук. 2000. № 2. С. 52–55.

12. *Спрингер Т. А., Штейнберг Р.* Классы сопряженных элементов // Семинар по алгебраическим группам. М.: Мир, 1973. С. 162–262.

13. *Fulton W., Harris J.* Representation Theory: a First Course. New York: Springer-Verlag, 1996. 551 p.

References

1. Steinberg R. *Lectures on Chevalley groups*. New Haven, Yale Univ., 1968. 277 p.

2. Dynkin E. B. Some properties of the weight system of the linear representation of a semisimple Lie group. *Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR*, 1950, vol. 71, no. 2, pp. 221–224 (in Russian).

3. Kac V. *Infinite-dimensional Lie algebras*. Cambridge, Cambridge University Press, 1990. 400 p.

4. Bourbaki N. *Groupes et Algèbres de Lie, Chaps. VII–VIII*. Paris, Hermann, 1975. 271 p.

5. Weyl H. *The Classical Groups: Their Invariants and Representations*. Princeton, Princeton University Press, 1946. 336 p.

6. Murnaghan F. D. *The Theory of Group Representations*. New York, Dover Publications, 2005. 369 p.

7. Littlewood D. E. On invariant theory under restricted groups. *Philos. Trans. Roy. Soc. A*, 1944, vol. 239, pp. 387–417. https://doi.org/10.1098/rsta.1944.0003

8. Liebeck M. W., Seitz G. M., Testerman D. M. Distinguished unipotent elements and multiplicity-free subgroups of simple algebraic groups. *Pacific J. Math.*, 2015, vol. 279, pp. 357–382. https://doi.org/10.2140/pjm.2015.279.357

9. Rizzoli A., Testerman D. M. Multiplicity-free representations of the principal A_1-subgroup in a simple algebraic group. *Pacific Journal of Mathematics*, 2025, vol. 336, no. 1–2, pp. 433–470. https://doi.org/10.2140/pjm.2025.336.433

10. Osinovskaya A. A. Restrictions of irreducible representations of classical algebraic groups to root A_1-subgroups. *Commun. in Algebra*, 2003, vol. 31, no. 5, pp. 2357–2379. https://doi.org/10.1081/AGB-120019001

11. Osinovskaya A. A. Restrictions of irreducible representations of the Lie algebra $\mathfrak{sl}_3$ to subalgebras of type $\mathfrak{sl}_2$ and the Jordan block structure of nilpotent elements. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2000, no. 2, pp. 52–55 (in Russian).

12. Springer T. A., Steinberg R. Conjugacy classes. *Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups*. Berlin, Springer-Verlag, 1970, vol. 131, pp. 167–266.

13. Fulton W., Harris J. *Representation Theory: a First Course*. New York, Springer-Verlag, 1996. 551 p.