



УДК 512.542

<https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1-7-17>

EDN: VRBVEG

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С НЕКОТОРЫМИ $n\Phi$ -ПОДГРУППАМИ

В. С. Монахов^{1,2}, Д. А. Ходанович¹

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

²Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь

e-mail: victor.monakhov@gmail.com, hodanovich@gsu.by

Поступила: 03.04.2026

Исправлена: 29.05.2026

Принята: 29.05.2026

Ключевые слова: конечная группа, нормальная подгруппа, подгруппа Фраттини, 2-максимальная подгруппа, формация, корадикал.

Аннотация. Рассматриваются только конечные группы. Подгруппа H группы G называется $n\Phi$ -подгруппой, если существует нормальная подгруппа K такая, что $G = HK$ и $H \cap K$ содержится в подгруппе Фраттини подгруппы H . Получено строение конечной группы в следующих случаях: $n\Phi$ -подгруппами являются все нормальные подгруппы; подгруппа Фраттини группы единична и каждая $n\Phi$ -подгруппа нормальна; каждая 2-максимальная подгруппа является $n\Phi$ -подгруппой; каждая 3-максимальная подгруппа является $n\Phi$ -подгруппой; для всех простых p каждая подгруппа порядка p^2 является $n\Phi$ -подгруппой. Для произвольной формации \mathfrak{F} устанавливается, что в \mathfrak{F} -корадикале группы каждая неединичная \mathfrak{F} -подгруппа не является $n\Phi$ -подгруппой.

FINITE GROUPS WITH CERTAIN $n\Phi$ -SUBGROUPS

V. S. Monakhov^{1,2}, D. A. Hodanovich¹

¹F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

²Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

e-mail: victor.monakhov@gmail.com, hodanovich@gsu.by

Received: 03.04.2026

Revised: 29.05.2026

Accepted: 29.05.2026

Keywords: finite group, normal subgroup, Frattini subgroup, 2-maximal subgroup, formation, residual.

Abstract. Only finite groups are considered. A subgroup H of a group G is called an $n\Phi$ -subgroup if there exists a normal subgroup K such that $G = HK$ and $H \cap K$ is contained in the Frattini subgroup of H . The structure of a finite group is obtained in the following cases: all normal subgroups are $n\Phi$ -subgroups; the Frattini subgroup of the group is trivial and every $n\Phi$ -subgroup is normal; every 2-maximal subgroup is an $n\Phi$ -subgroup; every 3-maximal subgroup is an $n\Phi$ -subgroup; for all primes p , every subgroup of order p^2 is an $n\Phi$ -subgroup. For an arbitrary formation \mathfrak{F} , it is established that in the \mathfrak{F} -residual of the a group, every non-trivial \mathfrak{F} -subgroup is not an $n\Phi$ -subgroup.

1. Введение

Рассматриваются только конечные группы. Используемые обозначения и терминология соответствуют [1–3].

Напомним следующие определения. Пусть H – подгруппа группы G . *Добавлением* к подгруппе H в группе G называется любая подгруппа K из G такая, что $G = HK$. Если, кроме того, $H \cap K = 1$, то подгруппу K называют *дополнением* к подгруппе H в группе G . Группа называется *вполне факторизуемой*, если в ней существует дополнение к каждой подгруппе. *Минимальным добавлением* к подгруппе H в группе G называется такая подгруппа K из G , что $HK = G$, но $HK_1 \neq G$ для любой собственной подгруппы K_1 из K .

Если A – нормальная подгруппа группы G и B – минимальное добавление к A в G , то $A \cap B \leq \Phi(B)$ [2, лемма 3.21], где $\Phi(B)$ – подгруппа Фраттини группы B . Это наблюдение обосновывает следующее

Определение 1.1 [4]. Подгруппа H группы G называется $n\Phi$ -подгруппой, если существует нормальная в G подгруппа K такая, что $G = HK$ и $H \cap K \leq \Phi(H)$. В этой ситуации подгруппу K будем называть $n\Phi$ -добавлением к H в группе G .

В любой группе единичная подгруппа и вся группа будут $n\Phi$ -подгруппами: к единичной подгруппе $n\Phi$ -добавление – сама группа; ко всей группе $n\Phi$ -добавление – единичная подгруппа. В каждой неединичной группе подгруппа Фраттини – собственная подгруппа. Если $n\Phi$ -подгруппа неединична, то ее $n\Phi$ -добавление – собственная подгруппа. Следовательно, в неабелевой простой группе нет нетривиальных $n\Phi$ -подгрупп. Если группа непростая, то минимальные добавления к каждой нормальной подгруппе будут $n\Phi$ -подгруппами: к фраттиниевым (т. е. содержащимся в подгруппе Фраттини группы) нормальным подгруппам вся группа будет $n\Phi$ -добавлением; к нефраттиниевым нормальным подгруппам $n\Phi$ -добавления – собственные подгруппы.

Из определения 1.1 следует также, что $n\Phi$ -подгруппа с единичной подгруппой Фраттини обладает нормальным дополнением. Отсюда следует, что если в группе все подгруппы простых порядков будут $n\Phi$ -подгруппами, то группа вполне факторизуема по теореме Ю. М. Горчакова [5], потому она сверхразрешима и все ее силовские подгруппы элементарные абелевы [6, теорема 7.8]. Так как дополнения к $n\Phi$ -подгруппам простых порядков нормальны в группе, то группа абелева [4, следствие 2.1.1]. В итоге получаем: *в группе все подгруппы простых порядков будут $n\Phi$ -подгруппами тогда и только тогда, когда группа абелева и все ее силовские подгруппы элементарные абелевы*. Отметим, что $n\Phi$ -подгруппа в работе [7] названа F -нормальной подгруппой и устанавливалась [7, теорема 3.1] только нильпотентность группы с F -нормальными подгруппами простых порядков. Кроме того, теорема 3.2 этой работы нуждается в более четкой формулировке.

В [4, лемма 1.5] отмечалось, что группа G p -нильпотентна тогда и только тогда, когда ее силовская p -подгруппа является $n\Phi$ -подгруппой. Отсюда следует, что *группа нильпотентна тогда и только тогда, когда все ее силовские подгруппы являются $n\Phi$ -подгруппами*.

В настоящей работе исследуются группы с новыми системами $n\Phi$ -подгрупп. Устанавливается, что группа совпадает с прямым произведением некоторых своих простых подгрупп в следующих двух случаях: каждая нормальная подгруппа является $n\Phi$ -подгруппой; подгруппа Фраттини группы единична и каждая $n\Phi$ -подгруппа нормальна. Доказывается, что группа G , в которой каждая 2-максимальная подгруппа является $n\Phi$ -подгруппой, либо нильпотентна, либо имеет порядок pq , а если каждая 3-максимальная подгруппа является $n\Phi$ -подгруппой, то G либо нильпотентна, либо $|G| \in \{p^2q, pqr\}$. Получена сверхразрешимость группы с $n\Phi$ -подгруппами порядков p^2 для всех простых p . Для произвольной формации \mathfrak{F} устанавливается, что в \mathfrak{F} -корадикале группы каждая неединичная \mathfrak{F} -подгруппа не является $n\Phi$ -подгруппой в группе.

2. Вспомогательные результаты

Если в группе G есть нормальное дополнение к силовской p -подгруппе, то группа G называется p -нильпотентной. Запись $X \leq Y$ означает, что X является подгруппой группы Y ; если X нормальна в Y , то пишем $X \trianglelefteq Y$. При $X \neq Y$ используем обозначения $X < Y$ и $X \triangleleft Y$. Если $1 < X < G$, то X называется нетривиальной подгруппой группы G . Запись $A \times B$ означает группу, которая является полупрямым произведением своих подгрупп A и B с нормальной в AB подгруппой A , а $\pi(G)$ – множество всех простых делителей группы G .

Приведем известные свойства подгруппы Фраттини, которые неоднократно будут использоваться при доказательствах.

Лемма 2.1 [2, теорема 3.4; 3, § III.3]. Пусть G – группа, $A \leq G$, $K \trianglelefteq G$. Тогда:

- (1) $\Phi(A^g) = (\Phi(A))^g$ для любого $g \in G$;
- (2) $\Phi(K) \leq \Phi(G)$, $\Phi(G)K/K \leq \Phi(G/K)$, если $K \leq \Phi(G)$, то $\Phi(G)/K = \Phi(G/K)$;
- (3) если $A \leq G$ и $K \leq \Phi(A)$, то $K \leq \Phi(G)$;
- (4) $\Phi(G_1 \times G_2) = \Phi(G_1) \times \Phi(G_2)$;
- (5) если G – p -группа, то $\Phi(G)$ является наименьшей нормальной подгруппой, фактор-группа по которой элементарная абелева p -группа;
- (6) пусть $D \trianglelefteq K$, $D \leq \Phi(G)$ и $D \trianglelefteq G$; если K/D нильпотентна, то K нильпотентна.

Лемма 2.2. Пусть G – группа, $N \trianglelefteq G$ и $N \leq A \leq X \leq G$. Если A – $n\Phi$ -подгруппа в G , то справедливы следующие утверждения:

- (1) A – $n\Phi$ -подгруппа в X ;
- (2) A^g – $n\Phi$ -подгруппа группы G для каждого $g \in G$;
- (3) A/N – $n\Phi$ -подгруппа в G/N ;
- (4) если $\Phi(A) = 1$, то $G = K \rtimes A$ для некоторой нормальной в G подгруппы K ;
- (5) если $A \neq 1$, то $n\Phi$ -добавление B к подгруппе A в группе G является собственной подгруппой группы G ;
- (6) если B – $n\Phi$ -добавление к подгруппе A в группе G , то $\pi(A) = \pi(G : B)$.

Доказательство. Поскольку A – $n\Phi$ -подгруппа в G , то существует нормальная в G подгруппа B такая, что $G = AB$ и $A \cap B \leq \Phi(A)$.

(1) По тождеству Дедекинда $X = A(X \cap B)$. Подгруппа $X \cap B$ нормальна в X и $A \cap (X \cap B) = A \cap B \leq \Phi(A)$, поэтому A – $n\Phi$ -подгруппа в X .

(2) Так как $G = AB$ и $A \cap B \leq \Phi(A)$, то $G = A^g B$ для каждого $g \in G$ и, согласно лемме 2.1,

$$A^g \cap B = (A \cap B)^g \leq (\Phi(A))^g = \Phi(A^g).$$

(3) Так как $G = AB$, $A \cap B \leq \Phi(A)$ и $N \leq A$, то $G/N = (A/N)(BN/N)$ и

$$(A/N) \cap (BN/N) = (A \cap BN)/N = (A \cap B)N/N \leq \Phi(A)N/N \leq \Phi(A/N).$$

(4) Утверждение следует из определения $n\Phi$ -подгруппы.

(5) Так как $A \neq 1$, то $\Phi(A) < A$. Поскольку группа $G = AB$ и $A \cap B \leq \Phi(A) < A$, то $B < G$.

(6) Так как $G = AB$, то $G/B \cong A/(A \cap B)$. Поскольку $A \cap B \leq \Phi(A)$, то

$$\pi(A) = \pi(A/(A \cap B)) = \pi(G : B). \quad \square$$

Лемма 2.3. Для группы G справедливы следующие утверждения:

(1) если $\Phi(G) \neq 1$, то каждая неединичная подгруппа из $\Phi(G)$ не является $n\Phi$ -подгруппой группы G ;

(2) если N – нормальная подгруппа группы G , то каждое минимальное добавление к N в G является $n\Phi$ -подгруппой группы G .

Доказательство. (1) Предположим, что $1 \neq H \leq \Phi(G)$ и H является $n\Phi$ -подгруппой группы G . Тогда существует нормальная подгруппа K в группе G такая, что $G = HK$, $H \cap K \leq \Phi(H) < H$. Из равенства $G = HK$ следует, что $G = HK \leq \Phi(G)K$ и $K = G$. Но теперь $H \cap K = H$, противоречие.

(2) Пусть N – нормальная подгруппа группы G и H – минимальное добавление к N в G . Тогда $G = NH$. Если $N \cap H$ не содержится в $\Phi(H)$, то существует максимальная в H подгруппа H_1 такая, что $(N \cap H)H_1 = H$. Но теперь

$$G = NH = (N \cap H)H_1 = NH_1,$$

что противоречит определению минимального добавления. Поэтому допущение неверно, и каждое минимальное добавление к N в G является $n\Phi$ -подгруппой группы G . \square

В диэдральной группе порядка 8 каждая из подгрупп порядка 4 обладает минимальными добавлениями порядка 4 и порядка 2. Значит, $n\Phi$ -подгруппы с равными $n\Phi$ -добавлениями могут иметь различные порядки.

Лемма 2.4. В разрешимой группе подгруппа Фиттинга является $n\Phi$ -подгруппой тогда и только тогда, когда группа нильпотентна.

Доказательство. Пусть G – разрешимая группа и предположим, что G ненильпотентна и $F = F(G)$ является $n\Phi$ -подгруппой. Тогда существует нормальная подгруппа K такая, что $G = FK$ и $(F \cap K) \leq \Phi(F)$. Так как группа G разрешима и ненильпотентна, то $1 < F < G$, $\Phi(F) < F$ и $K < G$ по лемме 2.2. Поскольку $\Phi(F) \leq \Phi(G)$, то $(F \cap K) < K$ и в K существует подгруппа L такая, что $(F \cap K) < L \leq K$ и $L/(F \cap K)$ – минимальная нормальная в $G/(F \cap K)$ подгруппа. Из разрешимости группы G следует, что $L/(F \cap K)$ абелева, а L будет нильпотентной согласно лемме 2.1. Теперь $L \leq F$ и $(F \cap K) < L \leq (F \cap K)$, противоречие. Поэтому допущение неверно и $G = F(G)$ нильпотентна. Необходимость доказана. Обратное утверждение также справедливо. \square

Условие разрешимости группы в лемме 2.4 опустить нельзя, примером служит группа $C_2 \times A_5$.

Здесь и далее C_n и A_n – циклическая группа порядка n и знакопеременная группа степени n . Как обычно, \mathfrak{A} , \mathfrak{N} и \mathfrak{U} – формации всех абелевых, нильпотентных и сверхразрешимых групп соответственно. Если \mathfrak{F} – формация, то пересечение всех нормальных подгрупп группы G , фактор-группы по которым принадлежат \mathfrak{F} , обозначается через $G^{\mathfrak{F}}$ и называется \mathfrak{F} -корадикалом группы G [1]. Ясно, что \mathfrak{A} -корадикал группы совпадает с ее коммутантом, а \mathfrak{N} - и \mathfrak{U} -корадикал группы называют нильпотентным и сверхразрешимым корадикалом соответственно. За классом всех абелевых (сверхразрешимых) групп с элементарными абелевыми силовскими подгруппами закрепим обозначение \mathfrak{A}_1 (соответственно \mathfrak{U}_1). Оба класса \mathfrak{A}_1 и \mathfrak{U}_1 являются наследственными формациями, но каждая из них ненасыщенная. В силу [6, теорема 7.8] формация \mathfrak{U}_1 совпадает с классом всех вполне факторизуемых групп. Если \mathfrak{F} – формация, G – группа, $H \leq G$ и $H \in \mathfrak{F}$, то H называется \mathfrak{F} -подгруппой группы G .

Самостоятельный интерес представляет следующее наблюдение.

Предложение 2.5. *Если \mathfrak{F} – формация и G – группа, то каждая неединичная \mathfrak{F} -подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}$ не является $n\Phi$ -подгруппой группы G . В частности, $n\Phi$ -подгруппами группы G не будут:*

- (1) подгруппы простых порядков из $G^{\mathfrak{A}_1}$;
- (2) неединичные вполне факторизуемые подгруппы из $G^{\mathfrak{U}_1}$;
- (3) неединичные абелевы подгруппы из коммутанта группы G ;
- (4) неединичные нильпотентные подгруппы из нильпотентного корадикала группы G ;
- (5) неединичные сверхразрешимые подгруппы из сверхразрешимого корадикала группы G .

Доказательство. Предположим противное и пусть H – неединичная $n\Phi$ -подгруппа группы G , $H \leq G^{\mathfrak{F}}$ и $H \in \mathfrak{F}$. Так как $1 \neq H \leq G^{\mathfrak{F}}$, то группа $G \notin \mathfrak{F}$ и $H < G$. Согласно определению $n\Phi$ -подгруппы существует нормальная в G подгруппа K такая, что $G = HK$ и $H \cap K \leq \Phi(H)$. Поскольку $H \neq 1$, то $\Phi(H) < H$ и $K < G$ по лемме 2.2. Далее,

$$G/K \cong H/(H \cap K) \in \mathfrak{F}, H \leq G^{\mathfrak{F}} \leq K, G = HK = K.$$

Получили противоречие. Основное утверждение доказано. При $\mathfrak{F} \in \{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{U}_1, \mathfrak{A}, \mathfrak{N}, \mathfrak{U}\}$ получаем утверждения (1)–(5). \square

Тиражируя другие значения формации \mathfrak{F} , получим новые свойства \mathfrak{F} -корадикалов произвольных групп.

Из предложения 2.5 вытекает

Следствие 2.6. *В группе G каждая подгруппа простого порядка является $n\Phi$ -подгруппой тогда и только тогда, когда G – абелева группа и все ее силовские подгруппы элементарны.*

Дисперсивная группа – группа, обладающая нормальным рядом, факторы которого изоморфны силовским подгруппам. Группа G порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ называется *дисперсивной по Оре* [1, с. 251; 2, с. 153], если $p_1 > p_2 > \dots > p_n$ и для любого i группа G имеет нормальную подгруппу порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i}$.

Группой Шмидта называют конечную нильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Начало изучения таких групп положила работа О. Ю. Шмидта [8]. Основные свойства групп Шмидта освещены в монографиях [1; 3]. Приведем только используемые далее в доказательствах свойства групп Шмидта.

Лемма 2.7. *Группа Шмидта S обладает следующими свойствами:*

- (1) $S = P \rtimes Q$, где P – нормальная силовская p -подгруппа, Q – ненормальная силовская q -подгруппа, p и q – различные простые числа;
- (2) $Q = \langle y \rangle$ – циклическая подгруппа и $y^q \in Z(S)$;
- (3) если P абелева, то P – элементарная абелева порядка p^m , где t – показатель p по модулю q ; если P неабелева, то $Z(P) = P' = \Phi(P)$; кроме того, $P/Z(P) = p^m$ и каждый неединичный элемент из P имеет порядок p при $p \geq 3$ и порядок 2 или 4 при $p = 2$;
- (4) $\Phi(S) = \Phi(P) \times \langle y^q \rangle$ и $P/\Phi(P)$ – главный фактор группы S ;
- (5) если K – нетривиальная нормальная подгруппа в S , то
 - (5.1) подгруппа Q не содержится в K ;
 - (5.2) если P не содержится в K , то $K \leq \Phi(S)$.

Доказательство. Пункты (1)–(4) см. [1, теоремы 26.1, 26.2].

(5) Пусть K – нетривиальная нормальная подгруппа в S . Так как K – с-обственная подгруппа группы, то подгруппа $K = P_1 \times Q_1$ нильпотентна, где P_1 и Q_1 – силовские p - и q -подгруппы в K соответственно. Ясно, что P_1 и Q_1 – нормальные подгруппы группы S , поэтому $Q_1 < Q$ и $Q_1 \leq \langle y^q \rangle = \Phi(Q) \leq \Phi(S)$ согласно утв. (4) доказываемой леммы. Если K не содержится в $\Phi(S)$, то P_1 не содержится в $\Phi(S)$, поэтому P_1 не содержится в $\Phi(P)$. Так как $P_1\Phi(P)$ – нормальная подгруппа в S , то $P_1\Phi(P) = P$ согласно утв. (4). Но теперь $P_1 = P$ по свойствам подгруппы Фраттини. В итоге, либо $K \leq \Phi(S)$, либо $P \leq K \leq P \times \langle y^{q^a} \rangle$ для некоторого целого $a \geq 1$. \square

Сверхразрешимой называют группу, которая обладает нормальным рядом с циклическими факторами. Каждая сверхразрешимая группа дисперсивна по Оре и имеет нильпотентный коммутант [3, теорема VI.9.]. Утверждения следующей леммы хорошо известны, впервые они получены в работах [9; 10].

Лемма 2.8. *Несверхразрешимая группа G , в которой каждая собственная подгруппа сверхразрешима, обладает следующими свойствами:*

- (1) группа G дисперсивна и $|\pi(G)| \leq 3$;
- (2) $G = G^{\Omega} \rtimes T$;
- (3) подгруппа $P = G^{\Omega}$ является силовской p -подгруппой для некоторого $p \in \pi(G)$; $P/\Phi(P)$ является минимальной нормальной подгруппой в $G/\Phi(P)$; $|P/\Phi(P)| > p$;
- (4) $T/T \cap \Phi(G)$ – либо примарная циклическая группа, либо минимальная неабелева группа.

3. Группы с нормальными $n\Phi$ -подгруппами

Лемма 3.1. *В группе G нет нетривиальных $n\Phi$ -подгрупп тогда и только тогда, когда $G/\Phi(G)$ – простая группа.*

Доказательство. Пусть только единичная подгруппа и вся группа являются $n\Phi$ -подгруппами в группе G . Предположим, что $G/\Phi(G)$ – непростая группа и пусть $N/\Phi(G)$ – нормальная подгруппа, $\Phi(G) < N < G$. Пусть H – минимальное добавление к нормальной подгруппе N в группе G . Согласно лемме 2.3 подгруппа H будет $n\Phi$ -подгруппой группы G . Так как $N < G$, то $H \neq 1$. Поскольку $\Phi(G) < N$, то $H \neq G$ и H – нетривиальная $n\Phi$ -подгруппа группы G , противоречие. Необходимость доказана.

Обратно, пусть $G/\Phi(G)$ – простая группа. Предположим, что существует в группе G нетривиальная $n\Phi$ -подгруппа H . Тогда существует нормальная в G подгруппа K такая, что $G = HK$ и $H \cap K \leq \Phi(H)$. Так как $1 < H < G$, то $1 < K$ и $K\Phi(G)/\Phi(G)$ – нормальная в $G/\Phi(G)$ подгруппа. По лемме 2.2 подгруппа $K < G$, поэтому $K\Phi(G) < G$. Так как $G/\Phi(G)$ – простая группа, то $K \leq \Phi(G)$. Но теперь, $G \neq HK$ противоречие. Следовательно, достаточность тоже выполняется. \square

Теорема 3.2. *Если в группе G каждая $n\Phi$ -подгруппа нормальна и $\Phi(G) = 1$, то G является прямым произведением простых подгрупп.*

Доказательство. Пусть в группе G каждая $n\Phi$ -подгруппа нормальна и $\Phi(G) = 1$. Если в G нет нетривиальных $n\Phi$ -подгрупп, то согласно лемме 3.1 группа G простая и утверждение справедливо. Пусть A – нетривиальная $n\Phi$ -подгруппа группы G . По условию подгруппа A нормальна в G и $\Phi(A) = 1$ по лемме 2.1, поэтому $G = A \times B$ для некоторой нормальной в G подгруппы B . Предположим, что подгруппа A непростая, и пусть A_1 – нетривиальная нормальная в A подгруппа. Тогда A_1 нормальна в G и $A_1B = A_1 \times B$ – нормальная в G подгруппа. Так как $G = A(A_1 \times B)$, то можно выбрать в A минимальное добавление V_1 к подгруппе $A_1 \times B$ в группе G . Ясно, что $V_1 < A$ и V_1 будет $n\Phi$ -подгруппой группы G по лемме 2.3. По условию подгруппа V_1 нормальна в G , поэтому

$$V_1 \cap (A_1 \times B) \leq \Phi(V_1) = 1, \quad G = V_1 \times A_1 \times B, \quad A = V_1 \times A_1.$$

Повторяя подобные действия с каждым из прямых сомножителей разложения $G = V_1 \times A_1 \times B$, через конечное число шагов приходим к разложению группы G в прямое произведение простых подгрупп. \square

Пример 3.3. В группе $G = \langle a \rangle \times PSL_2(7)$, $\langle a \rangle \cong C_2$, выберем подгруппу $\langle b \rangle < PSL_2(7)$, $\langle b \rangle \cong C_4$. Подгруппа $\langle ab \rangle$ не нормальна в G и является $n\Phi$ -подгруппой:

$$G = \langle ab \rangle PSL_2(7), \quad \langle ab \rangle \cap PSL_2(7) = \langle b^2 \rangle = \Phi(\langle ab \rangle).$$

Поэтому теорема 3.2 для неразрешимых групп не допускает обращения.

Теорема 3.4. *Для группы следующие утверждения эквивалентны:*

- (1) *в группе G каждая нормальная подгруппа является $n\Phi$ -подгруппой;*
- (2) *группа G является прямым произведением простых подгрупп;*
- (3) *в группе G каждая нормальная подгруппа обладает нормальным дополнением.*

Доказательство. Вначале докажем, что (1) \Rightarrow (2). Воспользуемся индукцией по порядку группы. Пусть в группе G каждая нормальная подгруппа является $n\Phi$ -подгруппой. Тогда $\Phi(G) = 1$ согласно лемме 2.3 и можно считать, что G непростая. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G . По условию N является $n\Phi$ -подгруппой группы G . Значит, существует нормальная в G подгруппа K такая, что $G = NK$ и $N \cap K \leq \Phi(N)$. Но $\Phi(N) \leq \Phi(G) = 1$ по лемме 2.1, поэтому $N \cap K = 1$, $G = N \times K$ и N – простая подгруппа. Если L – нормальная подгруппа в K , то L нормальна в G и по условию L является $n\Phi$ -подгруппой в G . Согласно лемме 2.2 подгруппа L будет $n\Phi$ -подгруппой в K . Значит, условие (1) теоремы выполняется для подгруппы K . По индукции $K = K_1 \times K_2 \times \dots \times K_n$, где K_i – простые группы, $i = 1, 2, \dots, n$. Следовательно, группа G – прямое произведение простых подгрупп.

Проверим, что (2) \Rightarrow (1) и (2) \Rightarrow (3). Пусть группа G – прямое произведение простых подгрупп. Воспользуемся индукцией по индексам нормальных подгрупп и докажем, что каждая нормальная в G подгруппа является $n\Phi$ -подгруппой и обладает нормальным дополнением. Так как подгруппы Фраттини и Фиттинга прямого произведения являются прямым произведением соответственно подгрупп Фраттини и Фиттинга сомножителей, то $\Phi(G) = 1$ и $G = F(G) \times K$, где $F(G)$ – произведение всех абелевых простых сомножителей, а K – всех неабелевых. Пусть N – минимальная нормальная в G подгруппа. Если N абелева, то $N \leq F(G)$ и $F(G) = N \times A$, поскольку $F(G)$ – произведение подгрупп простых порядков. Теперь

$$G = N \times (A \times K), (A \times K) \triangleleft G,$$

N является $n\Phi$ -подгруппой по лемме 2.3 и N обладает нормальным дополнением. Пусть N неабелева. Тогда $N \cap F(G) = 1$ и $F(G) \leq C_G(N)$. Если $N \cap K = 1$, то $K \leq C_G(N)$ и $N \leq Z(G)$, противоречие. Поэтому $N \cap K \neq 1$, $N \leq K$ и $K = N \times K_1$ согласно [2, теорема 2.30]. Значит,

$$G = N \times (F(G) \times K_1), (F(G) \times K_1) \triangleleft G,$$

N является $n\Phi$ -подгруппой по лемме 2.3 и N обладает нормальным дополнением. Следовательно, импликации (2) \Rightarrow (1) и (2) \Rightarrow (5) справедливы в случае, когда N – минимальная нормальная в G подгруппа. Ввиду индукции по индексам нормальных подгрупп получаем, что каждая нормальная в G подгруппа является $n\Phi$ -подгруппой и обладает нормальным дополнением. Импликации (2) \Rightarrow (1) и (2) \Rightarrow (3) доказаны. Ясно, что (3) \Rightarrow (2). Таким образом, (1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3). \square

Поскольку разрешимая простая группа имеет простой порядок, то из теорем 3.2 и 3.4 вытекает

Следствие 3.5. *Для разрешимой группы следующие утверждения эквивалентны:*

- (1) *в группе каждая нормальная подгруппа является $n\Phi$ -подгруппой;*
- (2) *группа абелева и каждая ее силовская подгруппа элементарна;*
- (3) *подгруппа Фраттини группы единичная и каждая $n\Phi$ -подгруппа нормальна.*

4. Группы с 2- и 3-максимальными $n\Phi$ -подгруппами

Предложение 4.1. *Если в группе G каждая максимальная подгруппа является $n\Phi$ -подгруппой, то группа G нильпотентна.*

Доказательство. Предположим, что группа G не нильпотентна и воспользуемся индукцией по порядку. Так как в G есть ненормальная максимальная подгруппа A , то по условию существует нормальная подгруппа B такая, что $G = AB$ и $A \cap B \leq \Phi(A)$. Подгруппа A неединична, поэтому $\Phi(A) < A$ и $B < G$ по лемме 2.2, т. е. группа G непростая.

Пусть N – нетривиальная нормальная подгруппа группы G и M/N – максимальная в G/N подгруппа. По условию подгруппа M является $n\Phi$ -подгруппой, а по лемме 2.2 подгруппа M/N является $n\Phi$ -подгруппой группы G/N . По индукции каждая нетривиальная фактор-группа группы G нильпотентна. В частности, $\Phi(G) = 1$ по лемме 2.1.

Поскольку фактор-группа G/N нильпотентна, то подгруппа M нормальна в G и $\Phi(M) \leq \leq \Phi(G) = 1$ по лемме 2.2. Так как M – $n\Phi$ -подгруппа, то существует нормальная в G подгруппа K такая, что $G = MK$ и $M \cap K \leq \Phi(M) = 1$. Теперь в G две нормальные подгруппы N и K , причем $N \cap \cap K = 1$. Поскольку фактор-группы G/N и G/K нильпотентны, то группа G нильпотентна. \square

В группе кватернионов порядка 8 каждая максимальная подгруппа является $n\Phi$ -подгруппой. Поэтому в условиях предложения 4.1 группа может быть неабелевой. В группе $D_8 \rtimes C_2 = Q_8 \rtimes C_2$, [11, SmallGroup(16,13)] тоже каждая максимальная подгруппа является $n\Phi$ -подгруппой.

Следствие 4.2. *Если в группе G каждая максимальная подгруппа из $G^{\mathfrak{N}}$ является $n\Phi$ -подгруппой группы G , то группа G сверхразрешима.*

Доказательство. Можно считать, что $G^{\mathfrak{M}} \neq 1$. В силу леммы 2.2 каждая максимальная подгруппа из $G^{\mathfrak{N}}$ является $n\Phi$ -подгруппой в $G^{\mathfrak{N}}$. По предложению 4.1 подгруппа $G^{\mathfrak{N}}$ нильпотентна. Пусть M – максимальная подгруппа в $G^{\mathfrak{N}}$. Тогда M нормальна в $G^{\mathfrak{N}}$ и $|G^{\mathfrak{N}}/M|$ – простое число. Согласно определению $n\Phi$ -подгруппы существует нормальная в G подгруппа K такая, что $G = MK$ и $M \cap K \leq \Phi(M)$. Если подгруппа M единична, то порядок подгруппы $G^{\mathfrak{N}}$ есть простое число и G сверхразрешима согласно [2, лемма 4.46], противоречие с договоренностью $G^{\mathfrak{M}} \neq 1$. Значит, подгруппа M неединична, $\Phi(M) < M$ и $K < G$ по лемме 2.2. Теперь

$$G/K \cong M/(M \cap K) \in \mathfrak{N}, G^{\mathfrak{N}} \leq K, G = MK \leq G^{\mathfrak{N}}K = K < G,$$

противоречие. Поэтому допущение неверно и утверждение справедливо. \square

В условиях следствия 4.2 группа G может быть ненильпотентной, подтверждающим примером служит ненильпотентная группа S_3 порядка 6.

Пусть K – подгруппа группы G . Если существует максимальная в G подгруппа M такая, что K является максимальной подгруппой в M , то K называется *2-максимальной подгруппой группы G* . Пусть L – подгруппа группы G . Если существует 2-максимальная в G подгруппа K такая, что L является максимальной подгруппой в K , то L называется *3-максимальной подгруппой группы G* .

Строение конечной группы с ограничениями на 2- и 3-максимальные подгруппы изучалось во многих работах различных авторов, впервые в [9]. Из свежих публикаций можно отметить работы [12–14], в которых наряду с новыми результатами обсуждалась перспективность дальнейших исследований.

Лемма 4.3. (1) *Если в группе G нет 2-максимальных подгрупп, то $|G| = p$.*

(2) *Если в группе G нет 3-максимальных подгрупп, то $|G| \in \{p^2, pq\}$.*

Доказательство. (1) Если в группе G нет 2-максимальных подгрупп, то каждая максимальная подгруппа единичная и G – группа простого порядка.

(2) Пусть в группе G нет 3-максимальных подгрупп. Тогда каждая 2-максимальная подгруппа единичная, а каждая максимальная подгруппа имеет простой порядок. Если G нильпотентна, то, очевидно, $|G| \in \{p^2, pq\}$. Если G ненильпотентна, то G – группа Шмидта и $|G| = pq$ согласно лемме 2.7. \square

Теорема 4.4. *Если в группе G каждая 2-максимальная подгруппа является $n\Phi$ -подгруппой, то либо группа G нильпотентна, либо является группой порядка pq , где p и q – различные простые числа.*

Доказательство. Пусть M – максимальная подгруппа группы G и H – максимальная подгруппа в M . Тогда H – 2-максимальная подгруппа группы G и по условию подгруппа H является $n\Phi$ -подгруппой группы G . По лемме 2.2 подгруппа H будет $n\Phi$ -подгруппой в M . Это верно для любой максимальной подгруппы H из M и для любой максимальной подгруппы M группы G . По предложению 4.1 все максимальные подгруппы в группе G нильпотентны.

Предположим, что группа G ненильпотентна. Тогда G – группа Шмидта. Согласно лемме 2.7 группа $G = P \times Q$, где P – нормальная в G силовская p -подгруппа, $Q = \langle y \rangle$ – ненормальная в G циклическая силовская q -подгруппа, подгруппа $\langle y^q \rangle$ содержится в центре группы G , и $P/\Phi(P)$ – главный фактор группы G .

Допустим, что $|P| > p$. Ясно, что $P \times \langle y^q \rangle$ – максимальная подгруппа группы G , а $H = P_1 \times \times \langle y^q \rangle \neq 1$ – 2-максимальная подгруппа группы G , где P_1 – максимальная подгруппа из P . Согласно лемме 2.1 подгруппа $\Phi(H) = \Phi(P_1) \times \langle y^{q^2} \rangle$. По условию подгруппа H является $n\Phi$ -подгруппой

группы G . Поэтому существует нормальная в G подгруппа K такая, что $G = HK$ и $H \cap K \leq \Phi(H)$. Так как $G > H \neq 1$, то $K < G$, поэтому H и K нильпотентны. Согласно [3, теорема VI.4.6] подгруппа $Q = \langle y^q \rangle K_q$, где K_q – силовская q -подгруппа в K . Циклическая q -подгруппа не является произведением двух собственных подгрупп [2, теорема 1.24] и $\langle y^q \rangle < Q$, поэтому $Q = K_q$. Но K нормальна в G и нильпотентна, значит подгруппа $Q = K_q$ должна быть нормальной в G , противоречие. Поэтому допущение « $|P| > p$ » неверно и $|P| = p$.

Теперь Q – максимальная в G подгруппа. Предположим, что $|Q| > q$. Тогда $\langle y^q \rangle$ – неединичная 2-максимальная подгруппа группы G и $\Phi(\langle y^q \rangle) = \langle y^{q^2} \rangle$. По условию подгруппа $\langle y^q \rangle$ является $n\Phi$ -подгруппой группы G . Поэтому существует нормальная в G подгруппа N такая, что $G = \langle y^q \rangle N$ и $\langle y^q \rangle \cap N \leq \langle y^{q^2} \rangle$. Так как $G > Q > \langle y^q \rangle \neq 1$, то $N < G$, поэтому N нильпотентна.

Согласно [3, теорема VI.4.6] $Q = \langle y^q \rangle N_q$, где N_q – силовская q -подгруппа в N . Циклическая q -подгруппа Q не является произведением двух собственных подгрупп [2, теорема 1.24] и $\langle y^q \rangle < Q$, поэтому $Q = N_q$. Но N нормальна в G и нильпотентна, значит, подгруппа $Q = N_q$ должна быть нормальной в G , противоречие. Поэтому допущение неверно и $|Q| = q$. \square

Теорема 4.5. *Если в группе G каждая 3-максимальная подгруппа является $n\Phi$ -подгруппой, то либо G нильпотентна, либо $|G| \in \{p^2q, pqr\}$.*

Доказательство. Пусть в группе G каждая 3-максимальная подгруппа является $n\Phi$ -подгруппой. Если в группе G нет 3-максимальных подгрупп, то $|G| \in \{p^2, pq\}$ согласно лемме 4.3 и теорема справедлива. Далее считаем, что в группе G есть 3-максимальные подгруппы. Согласно лемме 2.2, предложению 4.1 и теореме 4.4 каждая 2-максимальная подгруппа группы G нильпотентна, а каждая максимальная подгруппа в G либо нильпотентна, либо является ненильпотентной подгруппой порядка pq .

Случай 1: $G = P \times Q$ – группа Шмидта.

Пусть $|P| = p^a$, $|Q| = q^b$ и $1 < Q_1 < \dots < Q_{b-1} < Q$. Здесь и далее запись $X < Y$ означает, что X – максимальная подгруппа в группе Y . Поскольку P нормальна в G , то существует цепь подгрупп

$$1 < P_1 < \dots < P_{a-1} < P < PQ_1 < \dots < PQ_{b-1} < G. \quad (1)$$

Если $a + b \leq 3$, то $|G| \in \{p^2q, pq^2\}$ и можно считать, что группа G из заключения теоремы. При $a + b > 3$ из (1) следует, что в группе G существует нетривиальная 3-максимальная подгруппа H , порядок которой делится на p , а индекс делится на q . По условию H является $n\Phi$ -подгруппой группы G , поэтому существует нормальная в G подгруппа K такая, что $G = KH$ и $(K \cap H) \leq \Phi(H)$. Так как $1 < H < G$, то $1 < K < G$ по лемме 2.2. Фактор-группа $G/K \cong (H/(K \cap H))$ нильпотентна, поэтому $P = G^{\mathfrak{N}} \leq K$. Согласно лемме 2.7 подгруппа Q не содержится в K и $Q = K_q H_q$ для некоторых силовских q -подгрупп K_q и H_q из K и H соответственно [3, теорема VI.4.6]. Но циклическая q -подгруппа не является произведением двух собственных подгрупп [2, теорема 1.24], поэтому $Q = H_q \leq H$, так как Q не содержится в K . Получили противоречие с тем, что индекс подгруппы H в группе G делится на q .

Случай 2: G не является группой Шмидта.

В этом случае группа G содержит ненильпотентную максимальную подгруппу $M = C_p \times C_q$ порядка pq , $p > q$, q делит $(p - 1)$. Если $|G : M|$ – простое число, то $|G| \in \{p^2q, pq^2, pqr\}$ и теорема справедлива. Далее считаем, что $|G : M|$ – не простое число, в частности, группа G несверхразрешима и M – ненормальная в G подгруппа. Поскольку каждая максимальная подгруппа группы G сверхразрешима, то G является минимальной несверхразрешимой группой и применима лемма 2.8. Пусть $T = G_t = G^{\mathfrak{M}}$, t – простое число, и случай $t \in \{p, q\}$ не исключается.

Если $|\pi(G)| = 3$, то $t \notin \{p, q\}$, а из леммы 2.8 заключаем, что $G = T \rtimes M$ и T – минимальная нормальная подгруппа в группе G , поскольку $M < G$. Так как $|T| > t$, то существует подгруппа H такая, что $1 < H < T < TC_p < G$. По условию H является $n\Phi$ -подгруппой группы G . Поскольку T элементарна, то $\Phi(H) = 1$ и существует нормальная в G подгруппа K такая, что $G = K \rtimes H$. Фактор-группа $G/K \cong H$ нильпотентна, поэтому $T = G_t = G^{\mathfrak{M}} \leq K$ и $G = K \rtimes H \leq KT = K$, противоречие.

Пусть $|\pi(G)| = 2$. В этом случае $t \in \{p, q\}$, $T = G_p$ или $T = G_q$ и $G = T \rtimes C_s$, поскольку $T \cap C_s = 1$, где $s = \{p, q\} \setminus \{t\}$. Так как $|T/\Phi(T)| > t$, то существует 2-максимальная в T подгруппа H такая, что $\Phi(T) \leq H < T_1 < T < G$. По условию H является $n\Phi$ -подгруппой группы G , поэтому

существует нормальная в G подгруппа K такая, что $G = KH$ и $(K \cap H) \leq \Phi(H)$. Фактор-группа $G/K \cong (H/(K \cap H))$ нильпотентна, поэтому $T = G^{\mathfrak{U}} \leq K$ и $G = KH \leq KT = K$, противоречие. \square

5. Группы с некоторыми примарными $n\Phi$ -подгруппами

Группы с $n\Phi$ -силовскими подгруппами и $n\Phi$ -подгруппами простых порядков рассматривались в [4]. Теперь рассмотрим случай, когда $n\Phi$ -подгруппами являются подгруппы, порядки которых – квадраты простых чисел.

Теорема 5.1. *Если в группе G для каждого $p \in \pi(G)$ любая подгруппа порядка p^2 является $n\Phi$ -подгруппой, то группа G сверхразрешима.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы. По лемме 2.2 условию теоремы удовлетворяет каждая подгруппа, поэтому следует считать, что G – минимальная несверхразрешимая группа. Согласно лемме 2.8 группа $G = P \rtimes T$, где $P = G^{\mathfrak{U}}$ – силовская p -подгруппа группы G , а $P/\Phi(P)$ является минимальной нормальной подгруппой в $G/\Phi(G)$ и $|P/\Phi(P)| > p$. Пусть V – подгруппа порядка p^2 . По условию существует нормальная в G подгруппа K такая, что $G = VK$ и $V \cap K \leq \Phi(V)$. Если $V = P$, то

$$\Phi(V) = 1, K = T, G = V \times T, T \in \mathfrak{U}, G \in \mathfrak{U},$$

противоречие. Поэтому $V < P$ и $P = VK_p$ согласно [3, теорема VI.4.6], где K_p – силовская p -подгруппа в группе K . Так как K нормальна в p -замкнутой группе G , то K p -замкнута и K_p нормальна в G . Из равенства $P = VK_p$ следует, что K_p не содержится в $\Phi(P)$. Подгруппа $K_p\Phi(P)$ нормальна в G , а $P/\Phi(P)$ – минимальная нормальная в $G/\Phi(P)$ подгруппа, поэтому $K_p\Phi(P) = P$ и $K_p = P$. Но в этой ситуации $V \leq K$, что противоречит включению $V \cap K \leq \Phi(V)$. \square

В условиях теоремы 5.1 группа G может быть ненильпотентной, примером служит диэдральная группа порядка 12.

В [4, предложение 1.6] установлена нильпотентность группы с $n\Phi$ -силовскими подгруппами. Развивая этот результат, мы доказываем следующую теорему.

Теорема 5.2. *Если в группе G каждая нециклическая силовская подгруппа является $n\Phi$ -подгруппой, то группа G сверхразрешима и содержит нормальную холлову подгруппу H , в которой все силовские подгруппы циклические, а фактор-группа G/H нильпотентна.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Пусть G_p – силовская p -подгруппа в группе G для наименьшего $p \in \pi(G)$. Если G_p циклическая, то G p -нильпотентна [3, теорема IV.2.8]. Если G_p нециклическая, то по условию она является $n\Phi$ -подгруппой и G опять p -нильпотентна [4, лемма 1.5]. Итак, в любом случае в G существует нормальная p' -холлова подгруппа $G_{p'}$. Пусть Q – нециклическая силовская подгруппа из $G_{p'}$. Тогда Q является силовской подгруппой в G и по условию Q является $n\Phi$ -подгруппой в G . Согласно лемме 2.2 подгруппа Q является $n\Phi$ -подгруппой в $G_{p'}$. Следовательно, для $G_{p'}$ выполняется условие теоремы. По индукции подгруппа $G_{p'}$ сверхразрешима, в частности, подгруппа $G_{p'}$ дисперсивна по Оре. Так как p – наименьшее в $\pi(G)$ и $G_{p'}$ нормальна в G , то G дисперсивна по Оре. В частности, группа G разрешима.

Разобьем $\pi(G)$ на два подмножества σ и τ :

$$\sigma = \{p \in \pi(G) \mid G_p \text{ циклическая}\}, \tau = \{q \in \pi(G) \mid G_q \text{ нециклическая}\}.$$

Так как силовская подгруппа G_q является $n\Phi$ -подгруппой для каждого $q \in \tau$, то согласно [4, лемма 1.5] группа G q -нильпотентна для каждого $q \in \tau$. Поэтому

$$\bigcap_{q \in \tau} G_q = G_{\sigma} \trianglelefteq G.$$

В τ -холловой подгруппе G_{τ} каждая силовская подгруппа будет $n\Phi$ -подгруппой. Согласно [4, предложение 1.6] подгруппа $G_{\tau} \cong G/H$ нильпотентна.

Осталось показать сверхразрешимость группы G . Если $\sigma = \emptyset$, то $\tau = \pi(G)$ и G нильпотентна [4, предложение 1.6]. Пусть $\sigma \neq \emptyset$ и p – наибольшее в σ . Согласно [3, теорема IV.2.11] σ -холлова подгруппа $G_{\sigma} = H$ дисперсивна по Оре, поэтому G_p нормальна в G и $G = G_p \rtimes G_{p'}$. По лемме 2.2 в подгруппе $G_{p'}$ каждая нециклическая силовская подгруппа будет $n\Phi$ -подгруппой. По индукции

подгруппа $G_{p'}$ сверхразрешима. Так как G_p циклическая и $G/G_p \cong G_{p'}$ сверхразрешима, то группа G сверхразрешима [2, лемма 4.46 (1)]. \square

Диэдральная группа D_{12} порядка 12 удовлетворяет условиям теорем 5.1 и 5.2, поэтому в этих теоремах группа G может быть ненильпотентной.

Следствие 5.3. *Если в группе G каждая ненормальная нециклическая силовская подгруппа является $n\Phi$ -подгруппой, то $G = (G_\gamma \rtimes G_\sigma) \rtimes G_\tau$, где*

$$\gamma = \{p \in \pi(G) \mid G_p \text{ нормальна в } G\};$$

$$\sigma = \{p \in \pi(G) \mid G_p \text{ циклическая}\};$$

$$\tau = \{p \in \pi(G) \mid G_p \text{ является } n\Phi\text{-подгруппой группы } G\}.$$

Доказательство. Произведение всех нормальных в группе G силовских подгрупп будет нильпотентной нормальной γ -холловой подгруппой G_γ . По теореме Шура–Цассенхауза для подгруппы G_γ имеется дополнение в группе G , и ясно, что это дополнение будет $\{\sigma \cup \tau\}$ -холловой подгруппой $G_{\{\sigma \cup \tau\}}$. В силу леммы 2.2 к подгруппе $G_{\{\sigma \cup \tau\}}$ применима теорема 5.1. В итоге получаем $G = (G_\gamma \rtimes G_\sigma) \rtimes G_\tau$. \square

Следствие 5.4. *Если в группе G каждая ненормальная силовская подгруппа является $n\Phi$ -подгруппой, то группа G содержит нормальную нильпотентную холлову подгруппу H такую, что фактор-группа G/H нильпотентна.*

Знакопеременная группа A_4 показывает, что в условиях следствий 5.3 и 5.4 группа G может быть несверхразрешимой.

Исследования выполнены в рамках задания Государственной программы научных исследований «Конвергенция – 2030» при финансовой поддержке НАН Беларуси, проект 20260384.

Литература

1. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
2. Монахов В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Вышэйшая школа, 2006.
3. Huppert B. Endliche Gruppen I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1967.
4. Ходанович Д. А. Конечные группы с $n\Phi$ -подгруппами простых порядков // Проблемы физики, математики и техники. 2017. № 3. С. 66–68.
5. Горчаков Ю. М. Примарно факторизуемые группы // Доклады Академии наук СССР. 1960. Т. 134. С. 23–24.
6. Черников С. Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. М.: Наука, 1980.
7. Ma Xuanlong. On F -normal subgroups of finite groups // Ricerche mat. 2015. Vol. 64. P. 93–98.
8. Шмидт О. Ю. Группы, все подгруппы которых специальные // Математический сб. 1924. Т. 31. С. 366–372.
9. Huppert B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Zeitschr. 1954. Bd. 60. S. 409–434.
10. Doerk K. Minimal nicht überauflösbare, endliche Gruppen // Math. Zeitschr. 1966. Bd. 91. S. 198–205.
11. The GAP Group: GAP – Groups, Algorithms, and Programming. Ver. GAP 4.11.0 [Electronic resource]: A system for computational discrete algebra. Mode of access: <https://www.gap-system.org>. Date of access: 29.05.2025.
12. Konovalova M. N., Monakhov V. S., Sokhor I. L. On 2-maximal subgroups of finite groups // Communications in Algebra. 2022. Vol. 50. P. 96–103.
13. Лю А., Ван С., Сафонов В. Г., Скиба А. Н. Конечные группы с системами обобщенно нормальных подгрупп // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 4. С. 672–685.
14. Сафонов В. Г., Скиба А. Н. Характеризация некоторых классов конечных групп // Проблемы физики, математики и техники. 2024. № 4 (61). С. 57–64.

References

1. Shemetkov L. A. *Formations of Finite Groups*. Moscow, Nauka, 1987 (in Russian).
2. Monakhov V. S. *Introduction to the Theory of Finite Groups and Their Classes*. Minsk, Vysshaja shkola, 2006 (in Russian).
3. Huppert B. *Endliche Gruppen I*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 1967.
4. Khadanovich D. A. Finite groups with $n\Phi$ -subgroups of prime orders. *Problemy Fiziki, Matematiki i Tekhniki*, 2017, no. 3, pp. 66–68 (in Russian).
5. Gorchakov Yu. M. Primarily factorizable groups. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1960, vol. 134, pp. 23–24 (in Russian).
6. Chernikov S. N. *Groups with Given Properties of a System of Subgroups*. Moscow, Nauka, 1980. 384 p. (in Russian).
7. Ma Xuanlong. On F -normal subgroups of finite groups. *Ricerche mat*, 2015, vol. 64, pp. 93–98.
8. Schmidt O. Groups, all subgroups of which are special. *Matematicheskii Sbornik*, 1924, vol. 31, pp. 366–372. (in Russian).
9. Huppert B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen. *Math. Zeitschr*, 1954, vol. 60, pp. 409–434.
10. Doerk K. Minimal nicht überauflösbare, endliche Gruppen. *Math. Zeitschr*, 1966, vol. 91, pp. 198–205.
11. The GAP Group: GAP – Groups, Algorithms, and Programming. Ver. GAP 4.11.0 [Electronic resource]: A system for computational discrete algebra. Mode of access: <https://www.gap-system.org>. Date of access: 29.05.2025.
12. Konovalova M. N., Monakhov V. S., Sokhor I. L. On 2-maximal subgroups of finite groups. *Communications in Algebra*, 2022, vol. 50, pp. 96–103.
13. Liu A., Wang S., Safonov V. G., Skiba A. N. Finite groups with systems of generalized normal subgroups. *Siberian Mathematical Journal*, 2024, vol. 65, pp. 793–803.
14. Safonov V. G., Skiba A. N. Characterization of some classes of finite groups. *Problemy Fiziki, Matematiki i Tekhniki*, 2024, no. 4 (61), pp. 57–64 (in Russian).