Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2025. Том 33. № 1. С. 103–113

УДК 517.968.7 EDN: SQLRSR

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ, ЗАДАННОЕ НА КРИВОЙ В УГЛОВОЙ ОБЛАСТИ И СОДЕРЖАЩЕЕ КОМПЛЕКСНОЕ СОПРЯЖЕНИЕ

А. П. Шилин

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
e-mail: a.p.shilin@gmail.com

Поступила: 02.11.2025 **Исправлена:** 18.11.2025 **Принята:** 15.12.2025

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, гиперсингулярный интеграл, обобщенные формулы Сохоцкого, смешанная краевая задача, линейное дифференциальное уравнение.

Аннотация. Изучается новое линейное интегро-дифференциальное уравнение на замкнутой кривой, расположенной на комплексной плоскости. На кривую и на коэффициенты уравнения накладываются некоторые ограничения. Уравнение содержит гиперсингулярные интегралы с искомой функцией. Характерной особенностью уравнения является наличие также регулярных интегралов с искомой функцией и ее комплексно-сопряженным значением. Решение уравнения сводится к решению смешанной краевой задачи для аналитических функций и последующему решению дифференциальных уравнений с дополнительными условиями на решение. Явно указываются условия разрешимости исходного уравнения. При их выполнении решение строится в замкнутой форме. Приводится пример.

AN INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION DEFINED ON A CURVE IN THE ANGULAR DOMAIN AND CONTAINING A COMPLEX CONJUGATE

A. P. Shilin

Belarusian State University, Minsk, Belarus
e-mail: a.p.shilin@gmail.com

Received: 02.11.2025 **Revised:** 18.11.2025 **Accepted:** 15.12.2025

Keywords: integro-differential equation, hypersingular integral, generalized Sokhotsky formulas, mixed boundary problem, linear differential equation.

Abstract. A new linear integro-differential equation is studied on a closed curve located on the complex plane. There are some restrictions on the curve and the coefficients of the equation. The equation contains hypersingular integrals with the desired function. A characteristic feature of the equation is the presence of regular integrals with the desired function and its complex conjugate value. The solution of the equation is reduced to solving a mixed boundary value problem for analytic functions and the subsequent solutijn of differential equations with additional conditions on the solution. The conditions for the solvability of the original equation are explicitly stated. When these are performed, the solution is in closed form. An example is given.

1. Введение

Пусть L — простая замкнутая положительно ориентированная кривая класса C^1 на комплексной плоскости. Обозначим D_+ внутренность, а D_- внешность этой кривой. Искомой будет в дальнейшем функция $\varphi(t)$, $t \in L$, H-непрерывная (т. е. удовлетворяющая условию Гельдера) вместе со своими производными, входящими в исходное уравнение.

Для предельных значений на кривой L интеграла типа Коши

$$\Phi_\pm(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - z}, \quad z \in D_\pm,$$

и его производных справедливы полученные в [1] обобщенные формулы Сохоцкого

$$\Phi_\pm^{(k)}(t) = \pm\frac{1}{2}\varphi^{(k)}(t) + \frac{k!}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - t)^{k+1}}, \quad t \in L. \tag{1}$$

Формулы (1) справедливы в случае H-непрерывности производных $\varphi^{(k)}(t)$, при этом предельные значения также H-непрерывны. Гиперсингулярные интегралы в формулах (1) понимаются в смысле конечной части по Адамару, что согласно [1] приводит для их вычисления к формулам

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{k+1}} = \frac{\pi i\varphi^{(k)}(t)}{k!} + \int_L \frac{\varphi(\tau) - \sum_{j=0}^{k} \frac{\varphi^{(j)}(t)}{j!}(\tau-t)^j}{(\tau-t)^{k+1}} d\tau,$$

в правых частях которых интегралы сходятся в обычном смысле. Интегро-дифференциальное уравнение с такими гиперсингулярными интегралами введено в рассмотрение в [2] – это линейное уравнение с постоянными коэффициентами, которое решено в явном виде. С частными случаями переменных коэффициентов подобные уравнения изучались в [3; 4] и других работах.

Если в сингулярных интегральных уравнениях наряду с сингулярными интегралами присутствуют регулярные интегралы с искомой функцией, то такие уравнения принято называть полными. Если в гиперсингулярные интегральные или интегро-дифференциальные уравнения входят регулярные интегралы, то такие уравнения естественно тоже называть полными. Исследования полных гиперсингулярных интегро-дифференциальных уравнений начаты недавно [5–7] и продолжаются в настоящей работе. Эти исследования отличает конструктивный характер, когда явно указываются условия разрешимости и при их выполнении явно записываются сами решения.

2. Постановка задачи. Некоторые обозначения и факты

Зададим числа $a_k \in \mathbb{C}$, $b_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{0,n}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$. Зададим также H-непрерывные функции $a(t) \neq 0$, $b(t) \neq 0$, $h(t)$, $t \in L$. Обозначим

$$\varepsilon_j = e^{\frac{2\pi i}{m} j}, \quad j \in E = \{0, 1, ..., m-1\}, \tag{2}$$

комплексные корни степени m из единицы, $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$. Кривую L возьмем теперь расположенной в угловой области $\{z: \ 0 < \arg z < \frac{\pi}{m}\}$. Будем решать уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} \left[(a(t)a_k + b(t)b_k)\,\varphi^{(mk)}(t) + \frac{(a(t)a_k - b(t)b_k)\,(mk)!}{\pi i} \sum_{j=0}^{m-1} \left(\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-\varepsilon_j t)^{mk+1}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)}\,\overline{d\tau}}{(\overline{\tau}-\varepsilon_{m-j}t)^{mk+1}} \right) \right] = h(t), \quad t \in L, \tag{3}$$

$\varepsilon_m = \varepsilon_0$. Гиперсингулярными интегралами в уравнении (3) являются интегралы с $\varphi(\tau)$ во внутренней сумме при $j = 0$. Остальные интегралы, в том числе все интегралы с $\overline{\varphi(\tau)}$, являются регулярными. Обозначим

$$\overline{L} = \{t: \ t = \overline{\tau}, \ \tau \in L\}, \quad \overline{D}_+ = \{z: \ z = \overline{\zeta}, \ \zeta \in D_+\},$$

$$L_\beta = \{t: \ t = \varepsilon_\beta \tau, \ \tau \in L\}, \quad D_\beta = \{z: \ z = \varepsilon_\beta \zeta, \ \zeta \in D_+\},$$

$$\overline{L}_\beta = \{t: \ t = \varepsilon_\beta \tau, \ \tau \in \overline{L}\}, \quad \overline{D}_\beta = \{z: \ z = \varepsilon_\beta \zeta, \ \zeta \in \overline{D}_+\}, \ \beta = \overline{1, m-1},$$

$$D_* = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{L \bigcup D_+ \bigcup \overline{L} \bigcup \overline{D}_+ \bigcup_{\beta=1}^{m-1} L_\beta \bigcup_{\beta=1}^{m-1} D_\beta \bigcup_{\beta=1}^{m-1} \overline{L}_\beta \bigcup_{\beta=1}^{m-1} \overline{D}_\beta\},$$

где $\widehat{\mathbb{C}}$ – расширенная комплексная плоскость.

Возможный вид некоторых введенных объектов изображен на рис. 1.

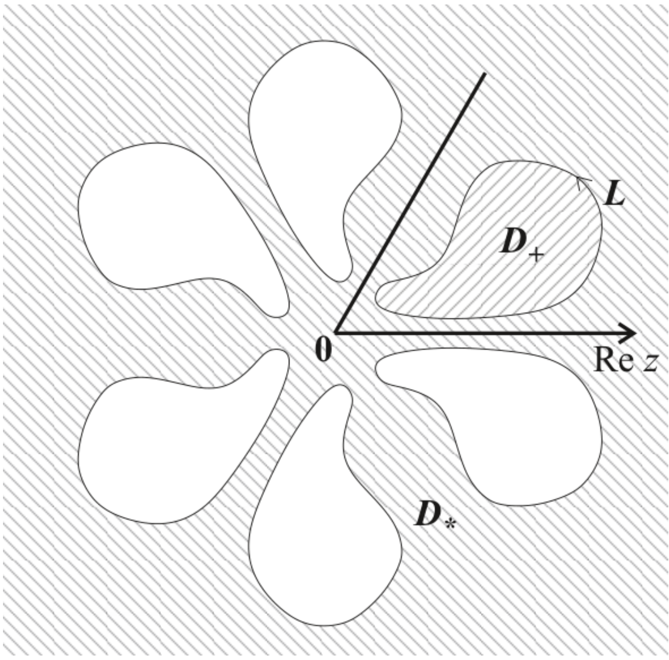

Рис. 1. Возможный вид кривой L и областей $D_+,\ D_*$ в случае $m=3$

Числа ε_j, вычисляемые по формуле (2) для $j\in\mathbb{Z}$, образуют по умножению циклическую группу порядка m (с образующим элементом ε_1), поэтому в дальнейшем эти числа для $j\in\mathbb{Z}\setminus E$ можно заменять на равные им числа для соответствующего значения $j\in E$. Отметим также равенство $\overline{\varepsilon_j}=\varepsilon_{-j},\quad j\in\mathbb{Z}$.

3. Сведение уравнения к краевой задаче для аналитических функций

Введем аналитические функции

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=0}^{m-1}\left(\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-\varepsilon_j z}-\int_L\frac{\overline{\varphi(\tau)}\,\overline{d\tau}}{\overline{\tau}-\varepsilon_{m-j}z}\right)=\begin{cases}\Psi_+(z), & z\in D_+,\\ \Psi_*(z), & z\in D_*.\end{cases}\tag{4}$$

Обоснуем, что функция $\Psi_*(z)$ обладает свойствами

$$\Psi_*(\varepsilon_1 z)=\Psi_*(z),\tag{5}$$

$$\Psi_*(\overline{z})=\overline{\Psi_*(z)},\tag{6}$$

$$\Psi_*(\infty)=0.\tag{7}$$

Так как числа ε_j образуют циклическую группу, то для любых чисел $m_1,\ m_2\ \in\mathbb{Z}$

$$\sum_{j=0}^{m-1}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-\varepsilon_{j+m_1}z}=\sum_{j=0}^{m-1}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-\varepsilon_j z},$$

$$\sum_{j=0}^{m-1}\int_L\frac{\overline{\varphi(\tau)}\,\overline{d\tau}}{\overline{\tau}-\varepsilon_{m-j+m_2}z}=\sum_{j=0}^{m-1}\int_L\frac{\overline{\varphi(\tau)}\,\overline{d\tau}}{\overline{\tau}-\varepsilon_{m-j}z}.$$

Поэтому, взяв в частности $m_1=m_2=1$, придем к равенству (5):

$$\Psi_*(\varepsilon_1 z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=0}^{m-1}\left(\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-\varepsilon_{j+1}z}-\int_L\frac{\overline{\varphi(\tau)}\,\overline{d\tau}}{\overline{\tau}-\varepsilon_{m-j+1}z}\right)=\Psi_*(z).$$

Свойство (6), выражающее симметрию функции относительно действительной оси, вытекает из равенства

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=0}^{m-1}\left(\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-\varepsilon_j z}-\int_L\frac{\overline{\varphi(\tau)}\,\overline{d\tau}}{\overline{\tau}-\varepsilon_{m-j}z}\right)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=0}^{m-1}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-\varepsilon_j z}+\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-\varepsilon_j\overline{z}}}.$$

Наконец, равенство (7) есть очевидное следствие известного свойства интеграла типа Коши.

Функция $\Psi_*(z)$ вполне характеризуется своими значениями в области

$$\{z:\ 0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{m}\} \setminus \left(D_+ \bigcup L\right)$$

(область берется вместе с соответствующими лучами). На остальную часть области D_* ее можно распространить, например, сначала продолжая по симметрии относительно действительной оси на симметричную область

$$\{z:\ -\frac{\pi}{m} \leqslant \arg z \leqslant 0\} \setminus \left(\overline{D}_+ \bigcup \overline{L}\right).$$

Затем «удвоенную» область

$$\{z:\ -\frac{\pi}{m} \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{m}\} \setminus \left(D_+ \bigcup L \bigcup \overline{D}_+ \bigcup \overline{L}\right)$$

следует вращать вокруг точки $z = 0$ на углы, кратные $\frac{2\pi}{m}$, сохраняя в соответствующих точках те же значения функции, что и в этой «удвоенной» области.

Для производных функции $\Psi_*(z)$ порядков mk, $k = \overline{1,n}$, получим

$$\Psi_*^{(mk)}(z) = \frac{(mk)!}{2\pi i} \sum_{j=0}^{m-1} \left(\int_L \frac{\varepsilon_j^{mk} \varphi(\tau) d\tau}{(\tau - \varepsilon_j z)^{mk+1}} - \int_L \frac{\varepsilon_{m-j}^{mk} \overline{\varphi(\tau)}\, \overline{d\tau}}{(\overline{\tau} - \varepsilon_{m-j} z)^{mk+1}} \right) =$$

$$= \frac{(mk)!}{2\pi i} \sum_{j=0}^{m-1} \left(\int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - \varepsilon_j z)^{mk+1}} - \int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)}\, \overline{d\tau}}{(\overline{\tau} - \varepsilon_{m-j} z)^{mk+1}} \right),$$

откуда понятно, что на эти производные переносятся все свойства вида (5), (6), (7).

Запишем предельные значения на кривой L функций (4) и их производных порядков, кратных m:

$$\Psi_+^{(mk)}(t) = \frac{1}{2} \varphi^{(mk)}(t) + \frac{(mk)!}{2\pi i} \sum_{j=0}^{m-1} \left(\int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - \varepsilon_j t)^{mk+1}} - \int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)}\, \overline{d\tau}}{(\overline{\tau} - \varepsilon_{m-j} t)^{mk+1}} \right), \tag{8}$$

$$\Psi_*^{(mk)}(t) = -\frac{1}{2} \varphi^{(mk)}(t) + \frac{(mk)!}{2\pi i} \sum_{j=0}^{m-1} \left(\int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - \varepsilon_j t)^{mk+1}} - \int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)}\, \overline{d\tau}}{(\overline{\tau} - \varepsilon_{m-j} t)^{mk+1}} \right), \quad k = \overline{0,n}, \quad t \in L. \tag{9}$$

Формулы (8), (9) получаются после применения к функциям в формуле (4) обобщенных формул Сохоцкого для интеграла с $\varphi(\tau)$ в случае $j = 0$ и дифференцирования под знаком интеграла для остальных интегралов. Вычитая и складывая равенства (8), (9), получим пару равносильных равенств

$$\varphi^{(mk)}(t) = \Psi_+^{(mk)}(t) - \Psi_*^{(mk)}(t), \tag{10}$$

$$\frac{(mk)!}{\pi i} \sum_{j=0}^{m-1} \left(\int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - \varepsilon_j t)^{mk+1}} - \int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)}\, \overline{d\tau}}{(\overline{\tau} - \varepsilon_{m-j} t)^{mk+1}} \right) = \Psi_+^{(mk)}(t) + \Psi_*^{(mk)}(t),$$

с помощью которых уравнению (3) можно придать вид краевой задачи

$$\sum_{k=0}^{n} \left[(a(t) a_k + b(t) b_k) \left(\Psi_+^{(mk)}(t) - \Psi_*^{(mk)}(t) \right) + (a(t) a_k - b(t) b_k) \left(\Psi_+^{(mk)}(t) + \Psi_*^{(mk)}(t) \right) \right] = h(t), \quad t \in L,$$

или после очевидных упрощений

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \Psi_+^{(mk)}(t) = \frac{b(t)}{a(t)} \sum_{k=0}^{n} b_k \Psi_*^{(mk)}(t) + \frac{h(t)}{2a(t)}, \quad t \in L. \tag{11}$$

Сумма в левой части равенства (11) является предельным значением на кривой L функции $Y_+(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Psi_+^{(mk)}(z)$, аналитической в области D_+. Сумма в правой части равенства (11) является предельным значением на кривой L функции $Y_*(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k \Psi_*^{(mk)}(z)$, аналитической в области D_*. Поскольку все производные $\Psi_*^{(mk)}(z)$ обладают свойствами, аналогичными (5), (6), (7), то этими же свойствами будут обладать и их линейные комбинации с действительными коэффициентами, т. е.

$$Y_*(\varepsilon_1 z) = Y_*(z), \tag{12}$$

$$Y_*(\bar{z}) = \overline{Y_*(z)}, \tag{13}$$

$$Y_*(\infty) = 0. \tag{14}$$

Возникшей краевой задаче можно придать вид

$$Y_+(t) = \frac{b(t)}{a(t)} Y_*(t) + \frac{h(t)}{2a(t)}, \quad t \in L. \tag{15}$$

Такая задача относится к смешанным краевым задачам. Вид краевого условия аналогичен виду краевого условия задачи Римана. Требование (12) на одну из искомых функций имеет характер краевого условия задачи Карлемана, а требование (13) – краевого условия задачи Гильберта. На эту задачу удается распространить классическую схему решения двухэлементных краевых задач [8]. В результате получится, что общее решение задачи (15) записывается по формулам

$$Y_+(z) = X_+(z)\left(T_+(z) + R(z)\right), \quad Y_*(z) = X_*(z)\left(T_*(z) + R(z)\right),$$

где

$$X_+(z) = e^{\Gamma_+(z)}, \quad X_*(z) = (z^m - z_0^m)^{-\alpha}\,(z^m - \overline{z_0})^{-\alpha}\, e^{\Gamma_*(z)}, \quad z_0 \in D_+,$$

$$\alpha = \mathrm{Ind}_L \frac{b(t)}{a(t)}, \qquad \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{m-1} \left[\int_L \frac{\ln\left((\tau^m - z_0^m)^{-\alpha}(\tau^m - \overline{z_0}^m)^{-\alpha} b(\tau)/a(\tau)\right) d\tau}{\tau - \varepsilon_j z} - \right.$$

$$\left. - \int_L \frac{\overline{\ln\left((\tau^m - z_0^m)^{-\alpha}(\tau^m - \overline{z_0}^m)^{-\alpha} b(\tau)/a(\tau)\right)}\, \overline{d\tau}}{\overline{\tau} - \varepsilon_{m-j} z} \right] = \begin{cases} \Gamma_+(z), & z \in D_+, \\ \Gamma_*(z), & z \in D_*, \end{cases}$$

$$\frac{1}{4\pi i} \sum_{j=0}^{m-1} \left[\int_L \frac{h(\tau)d\tau}{a(\tau)X_+(\tau)(\tau - \varepsilon_j z)} - \int_L \frac{\overline{h(\tau)}\,\overline{d\tau}}{\overline{a(\tau)}\,\overline{X_+(\tau)}(\overline{\tau} - \varepsilon_{m-j} z)} \right] = \begin{cases} T_+(z), & z \in D_+, \\ T_*(z), & z \in D_*, \end{cases}$$

$$R(z) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{2\alpha-1} c_k z^{mk}, & c_k \text{ – произвольные действительные постоянные, если } \alpha > 0, \\ 0, & \text{если } \alpha \leqslant 0. \end{cases}$$

При $\alpha \geqslant 0$ задача разрешима безусловно, а при $\alpha < 0$ для ее разрешимости необходимы и достаточны условия

$$\mathrm{Im} \int_L \frac{h(\tau)\tau^{mk-1} d\tau}{a(\tau)X_+(\tau)} = 0, \quad k = \overline{1, -2\alpha}. \tag{16}$$

Предположим, что задача (15) разрешима. Далее следует решать дифференциальные уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \Psi_+^{(mk)}(z) = Y_+(z), \quad z \in D_+, \tag{17}$$

$$\sum_{k=0}^{n} b_k \Psi_*^{(mk)}(z) = Y_*(z), \quad z \in D_*, \tag{18}$$

и в случае нахождения их решений воспользоваться формулой (10) при $k = 0$:

$$\varphi(t) = \Psi_+(t) - \Psi_*(t), \quad t \in L. \tag{19}$$

4. Решение дифференциальных уравнений

Общее решение уравнения (17), записанное после применения метода вариации произвольных постоянных, имеет вид

$$\Psi_+(z) = \sum_{\sigma=1}^{mn} u_\sigma(z) \left(C_\sigma^+ + \int_{z_1}^{z} \frac{U_\sigma(\zeta)d\zeta}{U(\zeta)} \right). \tag{20}$$

В этой формуле функции $u_\sigma(z)$, явный вид которых хорошо известен и здесь не приводится, образуют фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения, C_σ^+ – произвольные комплексные постоянные, $U(\zeta)$ – вронскиан функций $u_\sigma(\zeta)$, $U_\sigma(\zeta)$ – определитель, полученный из $U(\zeta)$ заменой элементов σ-го столбца на $0, 0, \ldots, 0, Y_+(\zeta)/a_n$, $\sigma = \overline{1, mn}$, z_1 – фиксированная точка в области D_+. Интегрирование в формуле (20) производится по любой кривой, принадлежащей D_+ и соединяющей точки z_1 и z, и вследствие конечности и односвязности области D_+ приводит к однозначным функциям.

Решение уравнения (18), в котором затем еще нужно будет учитывать условия (5), (6), (7), записывается по аналогичной формуле

$$\Psi_*(z) = \sum_{\sigma=1}^{mn} v_\sigma(z)\left(C_\sigma^* + \int_0^z \frac{V_\sigma(\zeta)d\zeta}{V(\zeta)}\right). \tag{21}$$

В формуле (21) $v_\sigma(z)$ – фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения, C_σ^* – произвольные постоянные, $V(\zeta)$ – вронскиан функций $v_\sigma(\zeta)$, $V_\sigma(\zeta)$ – определители, полученные из $V(\zeta)$ заменой элементов σ-го столбца на $0,0,\ldots,0,Y_*(\zeta)/b_n$, $\sigma=\overline{1,mn}$. Интегрирование производится по кривым, соединяющим в области D_* точки 0 и z, и вследствие многосвязности области D_* может привести к многозначным аналитическим функциям. В дальнейшем следует требовать выполнение равенств

$$\int_L \frac{V_\sigma(\zeta)d\zeta}{V(\zeta)} = 0, \quad \sigma=\overline{1,mn}, \tag{22}$$

$$\int_{L_\beta} \frac{V_\sigma(\zeta)d\zeta}{V(\zeta)} = 0, \quad \beta=\overline{1,m-1}, \quad \sigma=\overline{1,mn}, \tag{23}$$

$$\int_{\overline{L}} \frac{V_\sigma(\zeta)d\zeta}{V(\zeta)} = 0, \quad \int_{\overline{L}_\beta} \frac{V_\sigma(\zeta)d\zeta}{V(\zeta)} = 0, \quad \beta=\overline{1,m-1}, \quad \sigma=\overline{1,mn}, \tag{24}$$

являющихся необходимыми и достаточными условиями однозначности решения (21). Фундаментальная система решений в формуле (21) может быть любой, однако для учета условий (5), (6), (7) будем строить фундаментальную систему решений с некоторыми дополнительными свойствами.

Пусть уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} b_k\lambda^k = 0$$

имеет действительные корни λ_p кратностей соответственно k_p, $p=\overline{1,P}$, и комплексно-сопряженные корни θ_q, $\overline{\theta}_q$ кратностей соответственно m_q, $q=\overline{1,Q}$, $\sum_{p=1}^{P} k_p + 2\sum_{q=1}^{Q} m_q = n$. Для определенности считаем, что среди чисел λ_p нет равного нулю. Также для определенности можно считать $\mathrm{Im}\theta_q > 0$, $q=\overline{1,Q}$. Произвольным образом выберем и зафиксируем одно из значений $\sqrt[m]{\lambda_p}$, это значение будем в дальнейшем обозначать μ_p, $p=\overline{1,P}$. Аналогично произвольным образом выберем и зафиксируем одно из значений $\sqrt[m]{\theta_q}$, это значение будем в дальнейшем обозначать s_q, $q=\overline{1,Q}$. Тогда корни уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} b_k\mu^{mk} = 0,$$

являющегося характеристическим для однородного уравнения (18), можно записать в виде

$$\begin{array}{lllll} \varepsilon_0\mu_p, & \varepsilon_1\mu_p, & \ldots, & \varepsilon_{m-1}\mu_p, & p=\overline{1,P}, \\ \varepsilon_0 s_q, & \varepsilon_1 s_q, & \ldots, & \varepsilon_{m-1}s_q, & q=\overline{1,Q}, \\ \varepsilon_0\overline{s_q}, & \varepsilon_1\overline{s_q}, & \ldots, & \varepsilon_{m-1}\overline{s_q}, & q=\overline{1,Q}, \end{array} \tag{25}$$

причем каждый корень имеет соответствующую кратность k_p или m_q. Запишем функции

$$f_{l\gamma p}(z) = z^l\sum_{j=0}^{m-1}\varepsilon_j^{-\gamma}e^{\varepsilon_j\mu_p z}, \quad l=\overline{0,k_p-1}, \quad \gamma=\overline{0,m-1}, \quad p=\overline{1,P}, \tag{26}$$

$$g_{l\gamma q}(z) = z^l\sum_{j=0}^{m-1}\varepsilon_j^{-\gamma}e^{\varepsilon_j s_q z}, \quad l=\overline{0,m_q-1}, \quad \gamma=\overline{0,m-1}, \quad q=\overline{1,Q}, \tag{27}$$

$$h_{l\gamma q}(z) = z^l\sum_{j=0}^{m-1}\varepsilon_j^{-\gamma}e^{\varepsilon_j \overline{s_q} z}, \quad l=\overline{0,m_q-1}, \quad \gamma=\overline{0,m-1}, \quad q=\overline{1,Q}. \tag{28}$$

Из работы [7] следует, что совокупность функций (26), (27), (28) образует фундаментальную систему решений однородного уравнения (18), причем для всех этих функций справедливы равенства

$$f_{l\gamma p}(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_{l+\gamma} f_{l\gamma p}(z), \quad g_{l\gamma q}(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_{l+\gamma} g_{l\gamma q}(z), \quad h_{l\gamma q}(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_{l+\gamma} h_{l\gamma q}(z). \tag{29}$$

Если μ_p – комплексное число, то для некоторого $j = j_0$ $\varepsilon_{j_0}\mu_p = \overline{\mu_p}$. Учитывая тот факт, что при $j = \overline{0, m-1}$ как все значения ε_{j-j_0}, так и все значения $\overline{\varepsilon_j}$ совпадут со всеми значениями ε_j, получим

$$\sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_j^{-\gamma} e^{\varepsilon_j \mu_p z} = \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_{j_0}^{-\gamma} \left(\varepsilon_{j_0}^{-1} \varepsilon_j\right)^{-\gamma} e^{\varepsilon_j \varepsilon_{j_0}^{-1} (\varepsilon_{j_0} \mu_p) z} = \varepsilon_{j_0}^{-\gamma} \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_{j-j_0}^{-\gamma} e^{\varepsilon_{j-j_0} \overline{\mu_p} z} =$$

$$= \varepsilon_{j_0}^{-\gamma} \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_j^{-\gamma} e^{\varepsilon_j \overline{\mu_p} z} = \varepsilon_{j_0}^{-\gamma} \sum_{j=0}^{m-1} \overline{\varepsilon_j}^{\,-\gamma} e^{\overline{\varepsilon_j}\, \overline{\mu_p} z}.$$

В фундаментальной системе решений (26), (27), (28) каждую из функций в (26), для которой соответствующая постоянная $\varepsilon_{j_0}^{\gamma} \neq -1$, заменим на эту же функцию, умноженную на постоянную $\left(1 + \varepsilon_{j_0}^{\gamma}\right)$. В результате получим функции

$$\widetilde{f}_{l\gamma p}(z) = \left(1 + \varepsilon_{j_0}^{\gamma}\right) z^l \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_j^{-\gamma} e^{\varepsilon_j \mu_p z} = z^l \left(\sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_j^{-\gamma} e^{\varepsilon_j \mu_p z} + \sum_{j=0}^{m-1} \overline{\varepsilon_j}^{\,-\gamma} e^{\overline{\varepsilon_j}\, \overline{\mu_p} z} \right),$$

симметричные относительно действительной оси. Если же $\varepsilon_{j_0}^{\gamma} = -1$, то к симметричным относительно действительной оси функциям придем по формулам

$$\widetilde{f}_{l\gamma p}(z) = i\, f_{l\gamma p}(z).$$

Среди чисел $\sqrt[m]{\lambda_p}$ могут оказаться действительные числа (в количестве не более двух для каждого $p = \overline{1, P}$). Если выбранное число $\mu_p \in \mathbb{R}$, то можно считать $\mu_p = \overline{\mu_p}$, $j_0 = 0$, тогда $\varepsilon_0^{-\gamma} = 1$. Снова заменим функцию в (26) на функцию $\widetilde{f}_{l\gamma p}(z)$. В этом случае функция $f_{l\gamma p}(z)$ лишь удваивается, но оказывается при этом представленной в виде, в котором симметрия относительно действительной оси очевидна.

Для функций (27) (как и для функций (28)) подобные рассуждения не приведут к симметричным функциям, поскольку среди чисел (25) нет ни действительных, ни пар комплексно-сопряженных чисел. Теперь в совокупностях (27), (28) каждую пару функций

$$g_{l\gamma q}(z), \quad h_{l\gamma q}(z) = z^l \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_j^{-\gamma} e^{\varepsilon_j \overline{s_q} z} = z^l \sum_{j=0}^{m-1} \overline{\varepsilon_j}^{\,-\gamma} e^{\overline{\varepsilon_j}\, \overline{s_q} z}$$

заменим на новую пару функций

$$\widetilde{g}_{l\gamma q}(z) = g_{l\gamma q}(z) + h_{l\gamma q}(z) = z^l \left(\sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_j^{-\gamma} e^{\varepsilon_j s_q z} + \sum_{j=0}^{m-1} \overline{\varepsilon_j}^{\,-\gamma} e^{\overline{\varepsilon_j}\, \overline{s_q} z} \right),$$

$$\widetilde{h}_{l\gamma q}(z) = i\left(g_{l\gamma q}(z) - h_{l\gamma q}(z)\right) = i\, z^l \left(\sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_j^{-\gamma} e^{\varepsilon_j s_q z} - \sum_{j=0}^{m-1} \overline{\varepsilon_j}^{\,-\gamma} e^{\overline{\varepsilon_j}\, \overline{s_q} z} \right),$$

симметрия которых относительно действительной оси очевидна.
В результате получим фундаментальную систему решений однородного уравнения (18)

$$\widetilde{f}_{l\gamma p}(z), \quad l = \overline{0, k_p - 1}, \quad \gamma = \overline{0, m-1}, \quad p = \overline{1, P}, \tag{30}$$

$$\widetilde{g}_{l\gamma q}(z), \quad l = \overline{0, m_q - 1}, \quad \gamma = \overline{0, m-1}, \quad q = \overline{1, Q}, \tag{31}$$

$$\widetilde{h}_{l\gamma q}(z), \quad l = \overline{0, m_q - 1}, \quad \gamma = \overline{0, m-1}, \quad q = \overline{1, Q}, \tag{32}$$

все функции которой обладают свойством симметрии относительно действительной оси. Поскольку линейные комбинации функций, обладающих свойствами вида (29), сохраняют эти свойства, то для всех функций (30), (31), (32) будут выполняться равенства

$$\widetilde{f}_{l\gamma p}(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_{l+\gamma}\widetilde{f}_{l\gamma p}(z), \quad \widetilde{g}_{l\gamma q}(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_{l+\gamma}\widetilde{g}_{l\gamma q}(z), \quad \widetilde{h}_{l\gamma q}(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_{l+\gamma}\widetilde{h}_{l\gamma q}(z). \tag{33}$$

Если индексы $l+\gamma$ каких-то чисел $\varepsilon_{l+\gamma}$ не принадлежат множеству E, то заменим эти индексы на значения из E, сравнимые с ними по модулю m. В результате получится, что для каждого фиксированного значения $l = \overline{0, k_p - 1}$ и для каждого фиксированного значения $p = \overline{1, P}$ среди функций $\widetilde{f}_{l\gamma p}(z)$ есть ровно одна функция со свойством вида $\widetilde{f}(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_\gamma \widetilde{f}(z)$ для каждого значения $\gamma = \overline{0, m-1}$. Аналогичные рассуждения справедливы для функций $\widetilde{g}_{l\gamma q}(z)$ и $\widetilde{h}_{l\gamma q}(z)$. Следовательно, в дальнейшем в качестве функций $v_\sigma(z)$ можно взять переобозначенные функции (30), (31), (32), причем $\sigma = km + j$, а

$$v_{km+j}(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_{j-1} v_{km+j}(z), \quad k = \overline{0, n-1}, \quad j = \overline{1, m}. \tag{34}$$

Формула решения уравнения (18), приводящая вследствие равенств (34) к выполнению свойства (5), указана в [7]:

$$\Psi_*(z) = \sum_{k=0}^{n-1} C^*_{km+1} v_{km+1}(z) + \sum_{\sigma=1}^{mn} v_\sigma(z) \int_0^z \frac{V_\sigma(\zeta)d\zeta}{V(\zeta)}. \tag{35}$$

Эта формула получается из формулы (21), когда часть констант C^*_σ равна нулю.

Поскольку элементы вронскиана $V(\zeta)$ и элементы всех определителей $V_\sigma(\zeta)$ будут теперь симметричными функциями относительно действительной оси, симметричными будут и все подынтегральные функции в формуле (35). А так как интегралы вида $\int_0^z$ сохраняют симметрию функций, то решение (35) будет удовлетворять еще и свойству (6), если в нем считать в дальнейшем все постоянные C^*_{km+1} действительными.

В [7] обосновано, что при наличии свойств (34) из равенств (22), (23) достаточно оставить лишь равенства (22), поскольку равенства (23) являются следствием равенств (22). Но если справедливы равенства (22), (23), то будут справедливы и равенства (24), поскольку интегралы по симметричным относительно действительной оси кривым от симметричных функций одновременно либо равны нулю, либо не равны нулю, так что и равенства (24) оказываются следствием равенств (22).

Осталось учесть условие (7). Для этого разложим функцию $\Psi_*(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечности и приравняем к нулю коэффициенты при неотрицательных степенях z этого разложения. В результате получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, которой должны удовлетворять постоянные C^*_{km+1}:

$$\sum_{k=0}^{n-1} d_{lk} C^*_{km+1} = \delta_l, \quad l = 0, 1, 2, \ldots, \tag{36}$$

где

$$d_{lk} = \int_{|t|=\rho} \frac{v_{km+1}(t)dt}{t^{ml+1}}, \quad \delta_l = -\sum_{\sigma=1}^{mn} \int_{|t|=\rho} \frac{v_\sigma(t)dt}{t^{ml+1}} \int_0^t \frac{V_\sigma(\zeta)d\zeta}{V(\zeta)},$$

ρ – достаточно большое положительное число.

5. Формулировка результата. Пример

Используя формулу (19), сформулируем окончательный результат.

Теорема. *Для разрешимости уравнения* (3) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства* (16) *при* $\alpha < 0$, *равенства* (22) *и была совместна система* (36). *Если эти условия выполняются, то общее решение уравнения* (3) *находится по формуле*

$$\varphi(t) = \sum_{\sigma=1}^{mn} \left[u_\sigma(t) \left(C^+_\sigma + \int_{z_1}^t \frac{U_\sigma(\zeta)d\zeta}{U(\zeta)} \right) - v_\sigma(t) \int_0^t \frac{V_\sigma(\zeta)d\zeta}{V(\zeta)} \right] - \sum_{k=0}^{n-1} C^*_{km+1} v_{km+1}(t), \quad t \in L, \tag{37}$$

где C^+_σ *– произвольные комплексные постоянные,* $\sigma = \overline{1, mn}$, *а* C^*_{km+1} *– действительные постоянные, являющиеся решением системы* (36), $k = \overline{0, n-1}$.

Приведем пример уравнения (3), для которого оказываются выполненными все условия разрешимости. Возьмем в качестве кривой L окружность $|t-1-i|=\frac{1}{2}$. Из уравнения этой окружности в виде $\tau=1+i+\frac{1}{2}e^{2i\sigma}$, $\sigma\in[0,\pi]$, получим $\overline{d\tau}=-\frac{d\tau}{4(\tau-1-i)^2}$. Запишем уравнение

$$3\varphi''(t)-(1+4i)\varphi(t)+\frac{1-4i}{\pi i}\left(\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}+\int_L\frac{\overline{\varphi(\tau)}d\tau}{4(\tau-1-i)^2(\overline{\tau}-t)}+\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau+t}+\right.$$

$$\left.+\int_L\frac{\overline{\varphi(\tau)}d\tau}{4(\tau-1-i)^2(\overline{\tau}+t)}\right)+\frac{2}{\pi i}\left(\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^3}+\int_L\frac{\overline{\varphi(\tau)}d\tau}{4(\tau-1-i)^2(\overline{\tau}-t)^3}+\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau+t)^3}+\right.$$

$$\left.+\int_L\frac{\overline{\varphi(\tau)}d\tau}{4(\tau-1-i)^2(\overline{\tau}+t)^3}\right)=\frac{2(t^{12}+11t^8+20t^6+40t^4-48t^2+48)}{(t^4+4)^3},\quad t\in L. \tag{38}$$

Так на указанной окружности выглядит пример уравнения (3) при $n=1$, $m=2$, $a(t)=b(t)=1$, $a_1=2$, $b_1=1$, $a_0=-4i$, $b_0=-1$. Задача (15) для уравнения (38) приобретает вид задачи о скачке

$$Y_+(t)-Y_*(t)=\frac{t^{12}+11t^8+20t^6+40t^4-48t^2+48}{(t^4+4)^3},\quad t\in L. \tag{39}$$

Области D_+ и D_* аналитичности функций соответственно $Y_+(z)$ и $Y_*(z)$ изображены на рис. 2.

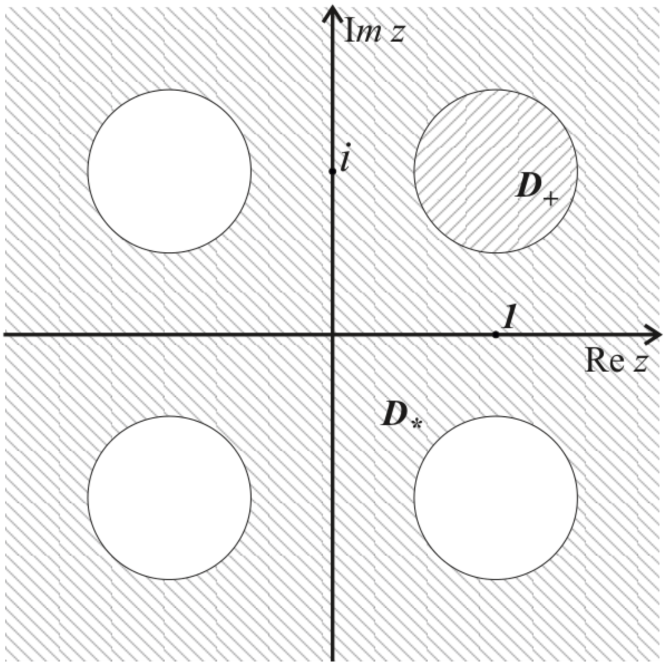

Рис. 2. Области D_+ и D_* для задачи (39)

Для $m=2$ получим $\varepsilon_0=1$, $\varepsilon_1=-1$, поэтому условие (12) примет вид $Y_*(-z)=Y_*(z)$ и будет выражать четность функции $Y_*(z)$. Совокупность условий (12), (13) можно истолковать как симметрию функции $Y_*(z)$ относительно обеих осей – действительной и мнимой.

Задача (39) (с учетом условия (14)) безусловно разрешима и имеет единственное решение. Легко найти представление

$$\frac{t^{12}+11t^8+20t^6+40t^4-48t^2+48}{(t^4+4)^3}=1-\frac{t^8-20t^6+8t^4+48t^2+16}{(t^4+4)^3},$$

из которого, очевидно, получим

$$Y_+(z)=1,\quad Y_*(z)=\frac{z^8-20z^6+8z^4+48z^2+16}{(z^4+4)^3}.$$

Далее следует решать уравнения

$$2\Psi''_+(z)-4\,i\,\Psi_+(z)=1,\quad z\in D_+, \tag{40}$$

$$\Psi''_*(z)-\Psi_*(z)=\frac{z^8-20z^6+8z^4+48z^2+16}{(z^4+4)^3},\quad z\in D_*. \tag{41}$$

Общее решение уравнения (40) можно записать, например, по формуле

$$\Psi_+(z)=C_1^+\mathrm{ch}\,((1+i)z)+C_2^+\mathrm{sh}\,((1+i)z)+\frac{i}{4}.$$

Свойства вида (33) для двух симметричных относительно действительной оси функций, образующих фундаментальную систему решений однородного уравнения (41), сведутся к четности одной и нечетности другой функции; такими функциями будут соответственно $\mathrm{ch}\,z$ и $\mathrm{sh}\,z$. Формула (35) примет вид

$$\Psi_*(z)=C_1^*\mathrm{ch}\,z-\mathrm{ch}\,z\int_0^z\frac{\zeta^8-20\zeta^6+8\zeta^4+48\zeta^2+16}{(\zeta^4+4)^3}\mathrm{sh}\,\zeta d\zeta+$$

$$+\mathrm{sh}\,z\int_0^z\frac{\zeta^8-20\zeta^6+8\zeta^4+48\zeta^2+16}{(\zeta^4+4)^3}\mathrm{ch}\,\zeta d\zeta.$$

Оба возникших интеграла можно вычислить:

$$\int_0^z\frac{\zeta^8-20\zeta^6+8\zeta^4+48\zeta^2+16}{(\zeta^4+4)^3}\mathrm{sh}\,\zeta d\zeta=\frac{\mathrm{ch}\,z}{z^4+4}+\frac{4z^3\mathrm{sh}\,z}{(z^4+4)^2}-\frac{1}{4},$$

$$\int_0^z\frac{\zeta^8-20\zeta^6+8\zeta^4+48\zeta^2+16}{(\zeta^4+4)^3}\mathrm{ch}\,\zeta d\zeta=\frac{\mathrm{sh}\,z}{z^4+4}+\frac{4z^3\mathrm{sh}\,z}{(z^4+4)^2},$$

и тогда после упрощений получим

$$\Psi_*(z)=\left(C_1^*+\frac{1}{4}\right)\mathrm{ch}\,z-\frac{1}{z^4+4}.$$

Очевидно, что для выполнения условия (7) следует взять $C_1^*=-\frac{1}{4}$, поэтому записывать соответствующую систему (36) нет необходимости. Наконец, по формуле (19) приходим к решению примера (38):

$$\varphi(t)=C_1^+\mathrm{ch}\,((1+i)t)+C_2^+\mathrm{sh}\,((1+i)t)+\frac{i}{4}+\frac{1}{t^4+4},\quad |t-1-i|=\frac{1}{2},$$

где C_1^+, C_2^+ – произвольные комплексные постоянные.

6. Заключительное замечание

Отметим наличие произвольных комплексных постоянных C_σ^+ в формуле (37) общего решения исходного уравнения, что нетипично для линейных уравнений, содержащих наряду с неизвестной функцией ее комплексно-сопряженное значение. Этому факту можно дать следующее объяснение. В формуле (19) произвольные комплексные постоянные содержатся лишь в выражении для $\Psi_+(t)$. При подстановке такой функции в интегралы с $\overline{\varphi(\tau)}$ в исходном уравнении получим

$$\int_L\frac{\overline{\Psi_+(\tau)}\,\overline{d\tau}}{(\overline{\tau}-\varepsilon_{m-j}t)^{mk+1}}=\overline{\int_L\frac{\Psi_+(\tau)d\tau}{(\tau-\varepsilon_j\overline{t})^{mk+1}}}.$$

Для $t\in L\quad \varepsilon_j\overline{t}\in D_-$, $j=\overline{0,m-1}$, поэтому функции $\frac{\Psi_+(z)}{(z-\varepsilon_j\overline{t})^{mk+1}}$ будут аналитическими в области D_+ и по интегральной теореме Коши

$$\int_L\frac{\Psi_+(\tau)d\tau}{(\tau-\varepsilon_j\overline{t})^{mk+1}}=0.$$

Следовательно, при подстановке решения в виде (19) в левую часть исходного уравнения наличие или отсутствие интегралов с $\overline{\varphi(\tau)}$ не влияет на вычисления, связанные с $\Psi_+(t)$, из-за чего постоянные C_σ^+ остаются произвольными комплексными.

Литература

1. *Зверович Э. И.* Обобщение формул Сохоцкого // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. 2012. № 2. С. 24–28.

2. *Зверович Э. И.* Решение гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами // Доклады Национальной академии наук Беларуси. 2010. Т. 54, № 6. С. 5–8.

3. *Зверович Э. И., Шилин А. П.* Решение интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными и гиперсингулярными интегралами специального вида // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. 2018. Т. 54, № 4. С. 404–407. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407

4. *Шилин А. П.* Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение с линейными функциями в коэффициентах // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. 2022. Т. 58, № 4. С. 358–369. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-4-358-369

5. *Шилин А. П.* Интегро-дифференциальное уравнение, связанное со смешанной задачей Римана–Гильберта // Труды 11-го международного семинара «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений», 16–20 сентября 2024 г., Минск, Беларусь. Минск: БГУ, 2024. С. 87–93.

6. *Шилин А. П.* Интегро-дифференциальное уравнение, связанное с краевой задачей Римана–Карлемана // Труды Института математики НАН Беларуси. 2024. Т. 32, № 2. С. 73–81.

7. *Шилин А. П.* Решение гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения на кривой, расположенной в угловой области // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2025. № 2. С. 6–15. EDN: OVOHOI

8. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.

References

1. Zverovich E. I. Generalization of Sokhotsky formulas. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*, 2012, no. 2, pp. 24–28 (in Russian).

2. Zverovich E. I. Solution of the hypersingular integro-differential equation with constant coefficients. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2010, vol. 54, no. 6, pp. 5–8 (in Russian).

3. Zverovich E. I., Shilin A. P. Integro-differential equations with singular and hypersingular integrals. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 404–407 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407

4. Shilin A. P. A hypersingular integro-differential equation with linear functions in coefficients. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*, 2022, vol. 58, no. 4, pp. 358–369 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-4-358-369

5. Shilin A. P. Integro-differential equation related to the mixed Riemann–Hilbert problem. *Proceedings of the* 11^{th} *International Workshop «Analytical Methods of Analysis and Differential Equations»*, September 16–20, 2024, Minsk, Belarus. Minsk, BSU, 2014, pp. 87–93 (in Russian).

6. Shilin A. P. Integro-differential equation associated with the Riemann–Carleman boundary value problem. *Proceedings of the Institute of Mathematics of the NAS of Belarus*, 2024, vol. 32, no. 2, pp. 73–81 (in Russian).

7. Shilin A. P. Solution of the hypersingular integro-differential equation on a curve located in the angular domain. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2025, no. 2, pp. 6–15 (in Russian). EDN: OVOHOI

8. Gakhov F. D. *Boundary Value Problems*. Moscow, Nauka, 1977 (in Russian).