Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2025. Том 33. № 2. С. 96–102

УДК 517.926.4 EDN: TZHQBX

ДВУМЕРНЫЙ АНТИПЕРРОНОВСКИЙ ЭФФЕКТ СМЕНЫ РАЗЛИЧНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ НА ОТРИЦАТЕЛЬНЫЙ ВОЗМУЩЕНИЯМИ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ

Н. А. Изобов[1], **А. В. Ильин**[2]

[1]*Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь*
[2]*Московский государственный университет, Москва, Россия*
e-mail: izobov@im.bas-net.by, iline@cs.msu.su

Поступила: 10.11.2025 **Исправлена:** 09.12.2025 **Принята:** 15.12.2025

Ключевые слова: характеристический показатель Ляпунова, возмущения высшего порядка малости, антиперроновский эффект.

Аннотация. Реализован двумерный антиперроновский эффект смены различных положительных показателей Ляпунова линейной дифференциальной системы на отрицательный возмущением высшего порядка малости.

TWO-DIMENSIONAL ANTI-PERRON EFFECT OF CHANGING ARBITRARY DIFFERENT POSITIVE LYAPUNOV EXPONENTS OF A LINEAR APPROXIMATION SYSTEM TO NEGATIVE ONES BY HIGHER-ORDER PERTURBATIONS

N. A. Izobov[1], **A. V. Il'in**[2]

[1]*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*
[2]*Moscow State University, Moscow, Russia*
e-mail: izobov@im.bas-net.by, iline@cs.msu.su

Received: 10.11.2025 **Revised:** 09.12.2025 **Accepted:** 15.12.2025

Keywords: Lyapunov characteristic exponent, perturbations of a higher order of smallness, anti-Perron effect.

Abstract. A two-dimensional anti-Perron effect of changing arbitrary different positive Lyapunov exponents of a linear differential system to negative ones by a perturbation of a higher order of smallness is realized.

Рассматриваем двумерные дифференциальные системы: линейную

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in R^2, \quad t \geqslant t_0 \geqslant 0, \tag{1}$$

с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и характеристическими показателями

$$\lambda_2(A) \geqslant \lambda_1(A) > 0$$

и нелинейную

$$\dot{y} = A(t)y + f(t,y), \quad y \in R^2, \quad t \geqslant t_0, \tag{2}$$

также с бесконечно дифференцируемым так называемым (см., например [1]) m-возмущением $f(t,y)$, имеющим порядок $m > 1$ малости в окрестности начала координат $y = 0$ и допустимого роста вне ее:

$$\|f(t,y)\| \leqslant C_f \|y\|^m, \quad C_f = \mathrm{const} > 0, \quad y \in R^2, \quad t \geqslant t_0. \tag{3}$$

Эффект Перрона [2, см. также 3, с. 50–51] устанавливает существование двумерных системы (1) со всеми отрицательными показателями и m-возмущения (3) таких, что возмущенная система (2) имеет нетривиальные решения с положительными показателями Ляпунова. Его исследованию посвящена серия работ авторов, в том числе и совместных с С. К. Коровиным. Бо́льший интерес своими возможными приложениями представляет противоположный антиперроновский эффект смены положительных характеристических показателей линейного приближения (1) на отрицательные у (некоторых) нетривиальных решений возмущенных систем (2) с малыми возмущениями, в частности, m-возмущениями (3) высшего порядка малости.

В работе [4] антиперроновский эффект в случае положительных совпадающих характеристических показателей реализован на одном нетривиальном решении системы (2) с отрицательным показателем.

В этом же случае совпадения положительных показателей линейного приближения двумерный антиперроновский эффект реализован [5] на большем числе нетривиальных решений с отрицательными показателями возмущенной системы (2) с соответствующим m-возмущением – на 4 таких решениях.

Возникает вопрос о возможной реализации двумерного антиперроновского эффекта смены m-возмущениями (3) положительных *различных* показателей $\lambda_2(A) > \lambda_1(A) > 0$ линейного приближения (1) на отрицательные у (некоторых) нетривиальных решений возмущенной системы (2). Положительный ответ содержит

Теорема. *Для любых параметров*

$$\lambda_2 > \lambda_1 > 0, \quad m > 1, \quad \theta > 1$$

существуют:

1) *двумерная линейная система* (1) *с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и характеристическими показателями* $\lambda_i(A) = \lambda_i$, $i = 1, 2$;

2) *также бесконечно дифференцируемое по т-возмущение*

$$f(t,y) : [t_0, +\infty) \times R^2 \to R^2$$

такие, что нелинейная возмущенная система (2) *имеет решение* $y(t) > 0$ *с показателем*

$$\lambda[y] = -(\theta+1)\frac{m\theta\lambda_1 + \lambda_2}{m^2\theta^2 - 1}. \tag{4}$$

1. Доказательство 1°. Определение линейной системы

Будем строить ее в диагональном виде

$$\dot{x} = \operatorname{diag}[a_1(t), a_2(t)]x \equiv A(t)x, \quad x \in R^2, \quad t \geqslant t_0, \tag{5}$$

с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и характеристическими показателями $\lambda_i(A) = \lambda_i$, $i = 1, 2$. Для этого, как обычно, будем использовать моменты времени $t_k = \theta^k$, $k \in N_0 \equiv N \cup \{0\}$, и обеспечивающую бесконечную дифференцируемость коэффициентов $a_1(t)$ и $a_2(t)$ системы (5) известную функцию Гелбаума–Олмстеда [6, с. 54]

$$e_{\gamma\delta}(\tau, \tau_1, \tau_2) = \gamma + (\delta - \gamma)\exp\{-(\tau-\tau_1)^{-2}\exp[-(\tau-\tau_2)^{-2}]\}, \quad \tau \in (\tau_1, \tau_2),$$

принимающую на концах рассматриваемого интервала значения γ и δ и нулевые значения своих односторонних производных любого порядка.

В рассматриваемом случае различных значений $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ коэффициенты $a_1(t)$ и $a_2(t)$, в отличие от работы [5] с совпадающими положительными построенными λ_1 и λ_2, определим на отрезках

$$T_{2k+j} = [t_{2k+j}, t'_{2k+j+1}], t'_{2k+j+1} \equiv t_{2k+j+1} - \varepsilon(t_{2k+j+1}), \quad \varepsilon(t) \equiv \exp(-t^2), \quad k \in N_0, \quad j = 0, 1,$$

равенствами

$$a_i(t) = (-1)^{i-1}\begin{cases} \alpha_i, & t \in T_{2k+j}, \\ -\alpha_i, & t \in T_{2k+j+1}, \end{cases} k \in N_0, \quad i = 1, 2, \quad j = 0, 1. \tag{6}$$

В них постоянные α_i имеют представление

$$\alpha_i = \lambda_i \frac{\theta+1}{\theta-1},$$

а номер j при всяком фиксированном $i \in \{1, 2\}$ принимает значения 0 и 1.

Определим теперь коэффициенты $a_1(t)$ и $a_2(t)$ с помощью функций $e_{\gamma\delta}$ на интервалах

$$I_{2k+j} \equiv (t'_{2k+j+1}, t_{2k+j+1}), \quad k \in N_0, \quad j = 0,1,$$

используя для этого уже определенные равенствами (6) их значения на концах интервалов I_{2k+j} :

$$a_i(t) = e_{a_i(t'_{2k+j+1})a_i(t_{2k+j+1})}(t), \quad t \in I_{2k+j+1}, \quad k \in N_0, \quad j = 0,1.$$

В силу свойств функций Гелбаума–Олмстеда так определенные при всех $k \in N_0$ и $j = 0,1$ коэффициенты являются бесконечно дифференцируемыми на всей полуоси $t \geqslant 1$.

Для вычисления характеристических показателей построенной системы линейного приближения (5) воспользуемся вспомогательной также диагональной линейной системой

$$\dot{x} = \mathrm{diag}[b_1(t), b_2(t)]x \equiv B(t)x, \quad x \in R^2, \quad t \geqslant t_0, \qquad (5_1)$$

коэффициенты $b_i(t)$, $i = \{1,2\}$, которой определяются равенствами

$$b_i(t) \equiv a_i(t_{2k+j}), \quad t \in [t_{2k+j}, t_{2k+j+1}), \quad k \in N_0, \quad j = 0,1.$$

Очевидно, для коэффициентов систем (5) и (5_1) справедливы соотношения

$$|a_i(t) - b_i(t)| = \begin{cases} \equiv 0, & t \in [t_{2k+j}, t'_{2k+j+1}), \\ \leqslant 2\alpha_2, & t \in [t'_{2k+j+1}, t_{2k+j+1}), \quad j = 0,1. \end{cases}$$

Тем самым в силу малой длины

$$0 < t_{2k+j+1} - t'_{2k+j+1} \leqslant \exp(-t_{2k}^2), \quad k \in N_0, \quad j = 0,1,$$

промежутков $[t'_{2k+j+1}, t_{2k+j+1})$ неравенство

$$\int\limits_{t_0}^{+\infty} \|B(\tau) - A(\tau)\| e^{\sigma\tau} d\tau < +\infty$$

выполнено при любом конечном $\sigma > 0$. Поэтому [7] линейные системы (5) и (5_1) являются асимптотически эквивалентными и их характеристические показатели совпадают. Последние же для системы (5_1) с кусочно-постоянными «периодически повторяющимися» коэффициентами имеют необходимые представления

$$\lambda_i(A) = \lambda_i(B) = \alpha_i \frac{\theta - 1}{\theta + 1} = \lambda_i, \quad i = 1,2.$$

2. Построение возмущенной системы и ее решения с отрицательным показателем

Эти построения будем вести методом, изложенным в нашей работе [4] с необходимыми изменениями и дополнениями.

На отрезке $[t_{2k}, t_{2k+2}]$ с произвольно фиксированным $k > k_0$ осуществим одновременные построения:

1) бесконечно дифференцируемого m-возмущения

$$f(t,y) = (f_1(t,y_2), f_2(t,y_1)) : [t_{2k}, t_{2k+2}] \times R_+^2 \to R^2$$

с положительным октантом

$$R_+^2 = \{y = (y_1, y_2) \in R^2 : y_1 \geqslant 0,\ y_2 \geqslant 0\}$$

и нулевыми значениями

$$f_i(t_{2k+j}, y_{3-i}) \equiv 0, \quad y \in R_+^2, \quad i = 1,2, \quad j = 0,2,$$

его компонент и такими же значениями их правосторонних производных любого порядка при $j = 0$ и левосторонних при $j = 2$;

2) решения $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ системы (2) с построенным m-возмущением $f(t,y)$, принимающего на концах рассматриваемого отрезка начальные и конечные значения

$$y_i(t_{2k+j}) = e^{\beta_i t_{2k+j}}, \quad i = 1,2, \quad j = 0,2 \qquad (6_{ij})$$

своих компонент

$$0 < y_i(t) \leqslant e^{\beta_2 t}, \quad t \in [t_{2k}, t_{2k+2}], \quad i = 1,2, \tag{6_i}$$

в которых отрицательные постоянные β_1 и β_2 определяются системой равенств

$$\beta_1 = m\theta^2\beta_2 + (\theta-1)^2\alpha_1, \tag{7_1}$$

$$\beta_2 = m\beta_1 + (\theta-1)(m\alpha_1 + \alpha_2). \tag{7_2}$$

Из этой системы получаем их следующие явные значения

$$\beta_1 = -(\theta-1)\left[\alpha_1 + \frac{\theta(\alpha_1 + m\theta\alpha_2)}{m^2\theta^2 - 1}\right] < \beta_2 = -(\theta-1)\frac{m\theta\alpha_1 + \alpha_2}{m^2\theta^2 - 1} < 0. \tag{8}$$

Исходя из уже полученных выше нулевых значений

$$f_i(t_{2k}, y_{3-i}) = 0, \quad i = 1,2,$$

компонент возмущения $f(t,y)$, продолжим их аналогичным образом

$$f_i(t, y_{3-i}) \equiv 0, \quad t \in [t_{2k}, \eta_{2k+3-i}], \quad \eta_{2k+i} \equiv t_{2k+i} - 1, \quad y \geqslant 0, \quad i = 1,2, \tag{8_i}$$

на максимально возможные по длине временные промежутки.

Для определения этих компонент $f_1(t,y_2)$ и $f_2(t,y_1)$ соответственно на интервалах (η_{2k+2}, t_{2k+2}) и (η_{2k+1}, t_{2k+1}) воспользуемся функциями

$$E(\tau,\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4) = \begin{cases} e_{0,1}(\tau,\tau_1,\tau_2), & \tau \in [\tau_1,\tau_2], \\ 1, & \tau \in (\tau_2,\tau_3], \\ e_{10}(\tau,\tau_3,\tau_4), & \tau \in (\tau_3,\tau_4], \end{cases}$$

$$F_k(y_i) = \begin{cases} y_i^m e_{01}(y_i, 0, \varepsilon(t_k)), & y_i \in [0, \varepsilon(t_k)], \quad i = 1,2, \\ y_i^m, & y_i > \varepsilon(t_k), \quad i = 1,2, \end{cases}$$

построенными нами в работе [4].

В соответствии с определением (8_1) первой компоненты $f_1(t,y_2)$ возмущения $f(t,y)$ для первой же компоненты $y_1(t)$ решения $y(t)$ с начальным условием (6_{10}) имеем представления

$$y_1(t) = \begin{cases} \exp[\beta_1 t_{2k} + \alpha_1(t - t_{2k})], & t \in [t_{2k}, t'_{2k+1}], \\ y_1(t'_{2k+1}) \exp \int\limits_{t'_{2k+1}}^{t} a_1(\tau)d\tau \equiv y_1(t'_{2k+1}) x_1(t, t'_{2k+1}), & t \in [t'_{2k+1}, t_{2k+1}]. \end{cases} \tag{9_1}$$

На следующем промежутке $[t_{2k+1}, t'_{2k+2}]$ компонента $y_1(t)$ определяется равенством

$$y_1(t) = y_1(t_{2k+1}) \exp[-\alpha_1(t - t_{2k+1}), \quad t \in [t_{2k+1}, t'_{2k+2}]. \tag{9_2}$$

Оценим ее сверху на отрезке $[t_{2k}, t_{2k+1}]$:

$$\lambda_1(t) \equiv t^{-1} \ln y_1(t) \leqslant t^{-1}[\beta_1 t_{2k} + \alpha_1(t - t_{2k})] = (\beta_1 - \alpha_1)t_{2k}t^{-1} + \alpha_1 \leqslant$$

$$\leqslant (\beta_1 - \alpha_1)\theta^{-1} + \alpha_1 = [\beta_1 + \alpha_1(\theta-1)]\theta^{-1} \overset{(8)}{=} -(\theta-1)\frac{\alpha_1 + m\theta\alpha_2}{m^2\theta^2 - 1} < \beta_2, \quad t \in [t_{2k}, t_{2k+1}]. \tag{10}$$

На следующем отрезке $[t_{2k+1}, t'_{2k+2}]$ производная

$$\lambda'_1(t) = t^{-2}[-\ln y_1(t_{2k+1})] - \alpha_1 t_{2k+1}$$

для компоненты $y_1(t)$ (см. (9_1), (9_2)) не меняет знака на интервале (t_{2k+1}, t'_{2k+2}) и поэтому функция $\lambda_1(t)$ принимает следующее наибольшее значение:

$$\max \lambda_1(t) = \max\{\lambda_1(t_{2k+1}), \lambda_1(t'_{2k+2})\}, \quad t \in [t_{2k+1}, t'_{2k+2}].$$

И если неравенство $\lambda_1(t_{2k+1}) < \beta_2$ уже установлено (см. (10)), то для $\lambda_1(t'_{2k+2})$ в силу равенства (9_2) и (7_1) справедливы оценки

$$\max\{\lambda_1(t'_{2k+2}), \lambda_1(t_{2k+2})\} \leqslant [\beta_1 - (\theta-1)^2\alpha_1 + 2\alpha_1\varepsilon(t_{2k+2})]\theta^{-2} < \beta_2 < 0,$$

при $k \geqslant k_0$ и соответствующем $k_0 \in N$.

Для последующего построения второй компоненты $f_2(t, y_1)$ m-возмущения $f(t, y)$ на отрезке $[\eta_{2k+1}, t_{2k+1}]$ необходимо получить на нем оценку снизу первой компоненты $y_1(t)$ решения $y(t)$. Из представлений (9_1) и первой оценки (10) имеем неравенства

$$\exp[(\beta_1-\alpha_1)t_{2k} + \alpha_1 t] \geqslant y_1(t) \geqslant \exp[(\beta_1-\alpha_1)t_{2k} + \alpha_1 t - 2\alpha_1\varepsilon(t_{2k+1})] \equiv$$

$$\equiv d'_{2k+1}\exp[(\beta_1-\alpha_1)t_{2k} + \alpha_1 t] \geqslant c'_{2k+1}\exp[-\alpha_1 + (\beta_1 + (\theta-1)\alpha_1)]t_{2k}, \quad t \in [\eta_{2k+1}, t_{2k+1}].$$

Из предыдущего неравенства с использованием представлений (7_1) и (8) величины β_1 получаем оценки

$$y_1(t) > c_{2k+1}\exp\left[-\frac{\theta(\theta-1)\alpha_2 t_{2k}}{m\theta-1}\right] > c_{2k+1}\exp(-\alpha_2 t_{2k+1}) > \exp(-t^2_{2k+1}) \equiv$$

$$\equiv \varepsilon(t_{2k+1}), \quad t \in [\eta_{2k+1}, t_{2k+1}], \quad k \geqslant k_0,$$

с постоянными $c_{2k+1} = c'_{2k+1}e^{-\alpha_1}$ и очевидным $k_0 \in N$.

Полученная оценка позволяет представить на отрезке $[\eta_{2k+1}, t_{2k+1}]$ вторую компоненту $f_2(t, y_1)$ возмущения $f(t, y)$ в следующем виде:

$$f_2(t, y_1)|_{y_1=y_1(t)} = -d_{2k+1}F_{2k+1}(y_1)|_{y_1=y_1(t)} \times E(t, \eta_{2k+1}, \eta'_{2k+1}, t'_{2k+1}, t_{2k+1}) =$$

$$= -d_{2k+1}y_1^m(t)E(t, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot), \eta'_{2k+1} = \eta_{2k+1} + \varepsilon(t_{2k+1}), \quad t \in [\eta_{2k+1}, t_{2k+1}].$$

На предыдущем $[t_{2k}, \eta_{2k+1}]$ и последующем $[t_{2k+1}, t_{2k+2}]$ промежутках эта вторая компонента $f_2(t, y_1)$ тождественно равна нулю (см. (8_2)). При этом постоянная d_{2k+1} подлежит последующему определению.

Исследуем теперь поведение второй компоненты $y_2(t)$ на отрезке $[t_{2k}, t_{2k+2}]$. На первой его половине $[t_{2k}, t_{2k+1}]$ она будет являться решением линейного неоднородного уравнения

$$\dot{y}_2 = a_2(t)y_2 + f_2[t, y_1(t)]$$

с начальным значением $y_2(t_{2k}) = \exp(\beta_2 t_{2k})$. На отрезке $[t_{2k}, \eta_{2k+1}]$, на котором $f_2(t, y_1) \equiv 0$, имеем представление

$$y_2(t) = \exp[\beta_2 t_{2k} - \alpha_2(t - t_{2k})],$$

а тем самым в силу неравенства $\beta_2 > -\alpha_2$ и необходимую оценку

$$0 < y_2(t) \leqslant \exp\beta_2 t, \quad t \in [t_{2k}, \eta_{2k+1}].$$

На следующем отрезке $[\eta_{2k+1}, t_{2k+1}]$ компонента $y_2(t)$, являясь решением приведенного неоднородного уравнения, имеет представление

$$y_2(t) = y_2(t_{2k})x_2(t, t_{2k}) - d_{2k+1}\int\limits_{\eta_{2k+1}}^{t} E(\tau, \eta_{2k+1}, \eta'_{2k+1}, t'_{2k+1}, t_{2k+1}) \times$$

$$\times y_1^m(\tau)x_2(t, \tau)d\tau \equiv z(t) - d_{2k+1}J_2(\eta_{2k+1}, t), \quad t \in [\eta_{2k+1}, t_{2k+1}], \tag{11}$$

в котором $x_2(t, \tau) \equiv \exp\int\limits_{\tau}^{t} a_2(\xi)d\xi$, и $J_2(\eta_{2k+1}, t)$ – интеграл. Постоянная же $d_{2k+1} > 0$ определяется из условия

$$z(t_{2k+1}) - d_{2k+1}J_2(\eta_{2k+1}, t_{2k+1}) = \tilde{y}_2(t_{2k+1}) > 0, \tag{12}$$

в котором

$$\tilde{y}_2(t_{2k+1}) = x_2^{-1}(t_{2k+2}, t_{2k+1})\exp(\beta_2 t_{2k+2}) \tag{13}$$

– новое значение компоненты $y_2(t)$ в момент $t = t_{2k+1}$.

Из равенств (12) и (13) получим значение постоянной $d_{2k+1} > 0$ и установим его ограниченность сверху не зависящей от k величиной, что позволит считать строящееся возмущение необходимым m-возмущением на всей полуоси $t \geqslant t_0$. Для этого оценим снизу интеграл $J_2(\eta_{2k+1}, t_{2k+1})$, учитывая при этом неравенство

$$y_1(\tau) \geqslant y_1(\eta_{2k+1}), \quad \tau \in [\eta_{2k+1}, t'_{2k+1}].$$

Справедливы также следующие неравенства

$$J_2(\eta_{2k+1}, t_{2k+1}) \geqslant \int\limits_{\eta'_{2k+1}}^{t'_{2k+1}} y_1^m(\eta_{2k+1}) x_2(t_{2k+1}, \tau) d\tau \geqslant [1 - 2\varepsilon(t_{2k+1})] \times$$

$$\times \exp\{-2m\alpha_2 + [m\beta_1 + (\theta - 1)m\alpha_1] t_{2k}\} \equiv c_2 \exp\{[m\beta_1 + (\theta - 1)m\alpha_1] t_{2k}\} = c_2 \exp[\beta_2 - (\theta - 1)\alpha_2] t_{2k},$$

причем последнее равенство имеет место в силу определения величин β_1 и β_2 (см. $(7_1) - (7_2)$).

Из представления (13) нового значения $\tilde{y}_2(t_{2k+1})$ компоненты $y_2(t)$ имеем неравенства

$$0 < \tilde{y}_2(t_{2k+1}) \leqslant c_3 \exp[\beta_2 t_{2k+2} - (\theta - 1)\alpha_2 t_{2k+1}]$$

с независящей от k постоянной $c_3 > 0$. Из равенства (12) получаем представление постоянной d_{2k+1} :

$$0 < d_{2k+1} = [z(t_{2k+1}) - \tilde{y}_2(t_{2k+1})] J_2(\eta_{2k+1}, t_{2k+1}) < z(t_{2k+1}) J_2^{-1}(\eta_{2k+1}, t_{2k+1}) \leqslant c = \text{const}.$$

Положительность d_{2k+1} следует из неравенств

$$\tilde{y}_2(t_{2k+1}) z^{-1}(t_{2k+1}) < \exp[\beta_2(t_{2k+2} - t_{2k}) - (\theta - 1)\alpha_2(t_{2k+1} - t_{2k})] \to 0.$$

При этом справедлива оценка

$$y_2(t) = \tilde{y}_2(t_{2k+1}) \exp[\alpha_2(t - t_{2k+1})] \leqslant \exp[\beta_2(2t_{2k+2} - t)], \quad t \in [t_{2k+1}, t_{2k+2}].$$

Для оценки сверху $|y_2(t)|$ второй компоненты $y_2(t)$ на отрезке $[\eta_{2k+1}, t_{2k+1}]$, определенной равенством (11), представим ее в следующем виде:

$$y_2(t) = x_2(t, t_{2k}) \left[e^{\beta_2 t_{2k}} - d_{2k+1} \int\limits_{\eta_{2k+1}}^{t} x_2^{-1}(\tau, t_{2k}) E(\tau, \ldots) y_1^m(\tau) d\tau \right],$$

причем согласно (12) и (13) в момент t_{2k+1} справедливо неравенство

$$e^{\beta_2 t_{2k}} - d_{2k+1} \int\limits_{\eta_{2k+1}}^{t_{2k+1}} \ldots d\tau > 0. \tag{14}$$

Так как первая компонента $y_1(t)$ возрастает на всем промежутке $[\eta_{2k+1}, t'_{2k+1}]$ (влияние промежутка $[t'_{2k+1}, t_{2k+1}]$ длины $\varepsilon[t_{2k+1}]$ не сказывается), то неравенство (14) будет сохраняться и для интеграла с верхним пределом $t \in [\eta_{2k+1}, t_{2k+1}]$. Это устанавливает положительность $y_2(t)$ на отрезке $[\eta_{2k+1}, t_{2k+1}]$, т. е. имеем $0 < y_2(t) \leqslant z(t)$ на этом же отрезке, а значит, $y_2(t) \leqslant \exp \beta_2 t$. Это неравенство сохранится и на следующем отрезке $[t_{2k+1}, t_{2k+2}]$.

Единственный на отрезке $[t_{2k}, t_{2k+2}]$ промежуток действия первой компоненты $f_1(t, y_2)$ m-возмущенная $f(t, y)$ – отрезок $[\eta_{2k+2}, t_{2k+2}]$ с левым концом $\eta_{2k+2} = t_{2k+2} - 1$. На нем выполнена очевидная оценка $y_2(t) \geqslant \varepsilon(t_{2k+2})$ и поэтому $F_{2k+2}[y_2(\tau)] = y_2^m(\tau)$, $\tau \in [\eta_{2k+2}, t_{2k+2}]$. Тем самым на рассматриваемом отрезке $[\eta_{2k+2}, t_{2k+2}]$ первая компонента имеет представление

$$y_1(t) = x_1(t, \eta_{2k+2}) y_1(\eta_{2k+2}) - d_{2k+2} \int\limits_{\eta_{2k+2}}^{t} y_2^m(\tau) E(\tau, \ldots) \ldots d\tau \equiv$$

$$\equiv u(t) - d_{2k+2} J_1(\eta_{2k+2}, t), \quad t \in [\eta_{2k+2}, t_{2k+2}],$$

с постоянной $d_{2k+2} > 0$, определяемой условием

$$u(t_{2k+2}) - d_{2k+2} J_1(\eta_{2k+2}, t_{2k+2}) = \exp[\beta_1 t_{2k+2}].$$

Все последующие рассуждения по доказательству ограниченности сверху (не зависящей от $k \in N$ постоянной) и положительности величины d_{2k+2} аналогичны рассуждениям, проведенным выше на отрезке $[\eta_{2k+1}, t_{2k+1}]$.

Таким образом, на отрезке $[t_{2k}, t_{2k+2}]$ построены необходимые m-возмущение и решение $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ возмущенной системы с начальными и конечными значениями (6_{ij}) и удовлетворяющие неравенствам (6_i). Методом математической индукции распространим эти построения на всю полуось $t \geqslant t_0$. Необходимое неравенство $\lambda[y] \leqslant \beta_2$ установлено. Теорема доказана.

Замечание. В нашем докладе [8] показатели $\lambda[Y_i]$ должны иметь представление (4).

Литература

1. *Изобов Н. А.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Математический анализ. Итоги науки и техники. 1974. Т. 12. С. 71–146.

2. *Perron O.* Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen // Math. Zeitschr. 1930. Bd. 32, H. 5. S. 702–728.

3. *Леонов Г. А.* Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения. М.: Ин-т компьют. исследований; Ижевск: R&C Dynamics, 2006. 168 с.

4. *Изобов Н. А., Ильин А. В.* Существование антиперроновского эффекта смены положительных показателей системы линейного приближения на отрицательные при возмущениях высшего порядка малости // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 12. С. 1599–1605.

5. *Изобов Н. А., Ильин А. В.* Построение решений с отрицательными показателями дифференциальной системы в двумерном антиперроновском эффекте при возмущениях высшего порядка // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60, № 12. С. 1616–1622.

6. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. М., 1964.

7. *Изобов Н. А., Мазаник С. А.* Об асимптотически эквивалентных линейных системах при экспоненциально убывающих возмущениях // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 2. С. 168–173.

8. *Изобов Н. А., Ильин А. В.* Вариант антиперроновского эффекта смены показателей Ляпунова у двумерных дифференциальных систем при возмущениях высшего порядка малости // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 8. С. 1143–1144.

References

1. Izobov N. A. Linear systems of ordinary differential equations. *Mathematical analysis. Results of science and technology,* 1974, vol. 12, pp. 71–146 (in Russian).

2. Perron O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen. *Math. Zeitschr.*, 1930, Bd. 32, H. 5, S. 703–728.

3. Leonov G. A. *Chaotic Dynamics and Classical Theory of Motion Stability*. Izhevsk, Inst. Komp'yut. Issled., 2006.

4. Izobov N. A., Il'in A. V. Existence of an anti-Perron effect of change of positive exponents of the linear approximation system to negative ones under perturbations of a higher order of smallness. *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 12, pp. 1591–1597.

5. Izobov N. A., Il'in A. V. Construction of solutions with negative exponents of a differential system in the two-dimensional anti-Perron effect under higher-order perturbations. *Differ. Equat.*, 2024, vol. 60, no. 12, pp. 1668–1674.

6. Gelbaum B. R., Olmsted J. M. H. *Counterexamples in Analysis*. San Francisco, Holden-Day, 1964.

7. Izobov N. A., Mazanik S. A. On linear systems asymptotically equivalent under exponentially decaying perturbations. *Differ. Equat.*, 2006, vol. 42, no. 2, pp. 182–187.

8. Izobov N. A., Il'in A. V. Variant of the anti-Perron effect of change of Lyapunov exponents of two-dimensional differential systems under perturbations of a higher order of smallness. *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 8, pp. 1143–1144.