Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2025. Том 33. № 2. С. 90–95

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
DIFFERENTIAL EQUATIONS, DYNAMIC SYSTEMS AND OPTIMAL CONTROL

УДК 517.9 EDN: SWKPWB

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ АСИНХРОННЫМ СПЕКТРОМ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИРРЕГУЛЯРНЫМ ДОПУСТИМЫМ МНОЖЕСТВОМ – НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ РАЗРЕШИМОСТИ

А. К. Деменчук, Е. К. Макаров

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
e-mail: demenchuk@im.bas-net.by, jcm@im.bas-net.by

Поступила: 09.10.2025 **Исправлена:** 13.11.2025 **Принята:** 15.12.2025

Ключевые слова: линейная система управления, периодическое решение, управление асинхронным спектром, иррегулярное допустимое множество, условие разрешимости.

Аннотация. Рассматривается линейная периодическая система управления с постоянной матрицей при управлении. Программное управление является периодическим, причем его период несоизмерим с периодом матрицы коэффициентов. Допустимое множество таких периодических управлений названо иррегулярным. Ставится задача выбора такого управления из указанного допустимого множества, чтобы теперь уже у квазипериодической системы появилось периодическое решение с заданным спектром частот, период которого совпадает с периодом управления. Поставленая задача названа задачей управления асинхронным спектром с иррегулярным допустимым множеством. Приводится необходимое условие ее разрешимости.

THE PROBLEM OF CONTROL OF THE ASYNCHRONOUS SPECTRUM OF LINEAR PERIODIC SYSTEMS WITH AN IRREGULAR FEASIBLE SET – A NECESSARY CONDITION FOR SOLVABILITY

A. K. Demenchuk, E. K. Makarov

Institute of Mathematic of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
e-mail: demenchuk@im.bas-net.by, jcm@im.bas-net.by

Received: 09.10.2025 **Revised:** 13.11.2025 **Accepted:** 15.12.2025

Keywords: linear control system, periodic solution, asynchronous spectrum control, irregular feasible set, solvability condition.

Abstract. A linear periodic control system with a constant control matrix is considered. The program control is periodic, and its period is incommensurate with the period of the coefficient matrix. The feasible set of such periodic controls is called irregular. The problem is posed of selecting a control from this feasible set so that the now quasiperiodic system has a periodic solution with a given frequency spectrum whose period coincides with the control period. This problem is called the asynchronous spectrum control problem with an irregular feasible set. A necessary condition for its solvability is given.

1. Введение

Управление сложными системами самой различной природы, такими как беспилотные летательные аппараты, радиоэлектронные устройства, эпидемиологические модели и др., требует разработки соответствующего математического аппарата. Одной из многих возникающих при этом задач, связанных с периодическими процессами (см., напр. [1; 2], и др.), является задача управления асинхронным спектром [3], которая состоит в следующем. Пусть управляемая система описывается уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

правая часть которого обеспечивает существование и единственность решений и периодична или почти периодична по t. Управление u принимает значения в некотором допустимом множестве, определяемом постановкой конкретной задачи. Задачу выбора такого управления u, чтобы у данного уравнения появились нерегулярные периодические решения, спектр частот которых содержит заданное подмножеством L, названа задачей управления спектром нерегулярных колебаний (асинхронным спектром) с целевым множеством частот L.

Вопросы разрешимости сформулированной задачи применительно к линейным периодическим системам с программным управлением того же периода изучались в работах [4–6] и др. Вполне естественно ожидать, что задача управления асинхронным спектром допускает модифицированные варианты, связанные с выбором иных видов управления. Например, в монографии [7, гл. III] и др. рассматривался случай синтеза управления в виде линейной по фазовым переменным обратной связи.

В настоящей работе впервые формулируется задача управления асинхронным спектром периодических систем, где в качестве допустимого множества выступают периодические функции, период которых несоизмерим с периодом системы.

2. Предварительные сведения

Приведем необходимые для замкнутости изложения понятия теории периодических и квазипериодических скалярных функций, которые без труда переносятся на векторно- и матричнозначные функции. Пусть конечное множество действительных чисел $(\omega_1)^{-1},\ldots,(\omega_k)^{-1}$ рационально линейно независимо. Непрерывная функция $g(t)$ называется квазипериодической с периодами $\omega_1,\ldots,\omega_k$, если найдется непрерывная функция k переменных $G^*(t_1,\ldots,t_k)$, периодическая по t_j с периодом ω_j $(j=\overline{1,m})$, которая является диагональной для исходной функции, т. е.

$$g(t)\equiv G^*(t,\ldots,t).$$

Числа $2\pi/\omega_1,\ldots,2\pi/\omega_k$ образуют базис частот квазипериодической функции $f(t)$. Квазипериодическими будут, в частности, тригонометрические многочлены с рационально линейно независимыми частотами. Например, функция $f(t)=\sin 2\pi t+\cos(2\pi/\sqrt{2})t$ является квазипериодической с периодами $\omega_1=1$ и $\omega_2=\sqrt{2}$. Очевидно, что периодические функции являются подмножеством квазипериодических и имеют одночастотный базис.

Для непрерывной ω-периодической функции $f(t)$ среднее значение – это постоянная величина

$$\hat{f}=\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} f(\tau)d\tau,$$

а осциллирующая часть определяется равенством

$$\tilde{f}(t)=f(t)-\hat{f}.$$

Показателем Фурье (частотой) функции $f(t)$ называется действительное число μ такое, что хотя бы один из интегралов

$$\int_0^{\omega} f(t)\cos\mu t dt$$

или

$$\int_0^{\omega} f(t)\sin\mu t dt$$

отличен от нуля. Множество показателей Фурье периодической функции образует ее спектр.

Через $\operatorname{rank}_{\mathrm{row}}\tilde{H}$ обозначим строчный ранг некоторой периодической матрицы $H(t)$, т. е. наибольшее число ее линейно независимых столбцов. Подобным образом можно определить и столбцовый ранг этой матрицы $\operatorname{rank}_{\mathrm{col}} H$. Отметим, что в общем случае строчный и столбцовый ранги матрицы $H(t)$ не обязаны совпадать. Действительно, для матрицы

$$H(t) = \begin{pmatrix} \sin t & 2\sin t \\ \cos t & 2\cos t \end{pmatrix}$$

имеем $\operatorname{rank}_{\mathrm{row}} H = 2$, а $\operatorname{rank}_{\mathrm{col}} H = 1$. В стационарном случае введенные ранги, очевидно, будут совпадать. Будем говорить, что $H(t)$ – матрица неполного столбцового ранга, если ее столбцовый ранг меньше числа столбцов.

Рассмотрим квазипериодическую систему

$$\frac{dz}{dt} = g(t,z) + h(t,z), \quad z \in \mathbb{R}^n,$$

где вектор-функции g и h периодические по первому аргументу с периодами ω и Ω соответственно, причем отношение этих периодов иррационально.

Определение 2.1. Периодическое решение $z = z(t)$ с периодом Ω данной системы называется частично нерегулярным [8], а его частотный спектр – частично асинхронным.

3. Постановка задачи

Рассмотрим линейную систему управления

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

в которой $A(t)$ – непрерывная ω-периодическая $(n \times n)$-матрица; B – постоянная $(n \times m)$-матрица; u – управление. В качестве управляющего воздействия $u(\cdot)$ в системе (1) будем использовать непрерывные на вещественной оси Ω-периодические m-вектор-функции такие, что числа ω и Ω несоизмеримы. Допустимые множества периодических функций такого рода будем называть иррегулярными.

Задача управления частично асинхронным спектром с целевым множеством L и иррегулярным допустимым множеством состоит в следующем: выбрать такое программное управление

$$u = U(t) \tag{2}$$

из указанного допустимого множества, чтобы система

$$\dot{x} = A(t)x + Bu(t) \tag{3}$$

имела нетривиальное частично нерегулярное решение $x = x(t)$ периода Ω с заданным спектром частот L.

Сформулированная задача является принципиально новой, поскольку в силу выбора указанного управления система (3) будет не периодической, а квазипериодической с двумя базисными частотами.

4. Основной результат

Укажем необходимое условие разрешимости поставленной задачи. Справедлива

Теорема 4.1. *Пусть задача управления асинхронным спектром системы* (1) *с иррегулярным допустимым множеством имеет решение. Тогда осциллирующая составляющая матрицы коэффициентов имеет неполный столбцовый ранг, т. е. выполняется оценка*

$$\operatorname{rank}_{\mathrm{col}} \tilde{A} = n - d, \quad 1 \leqslant d < n. \tag{4}$$

Доказательство проведем методом от противного. Допустим, что задача управления асинхронным спектром системы (1) с иррегулярным допустимым множеством разрешима, а условие (4) не имеет места. Другими словами, найдется Ω-периодический вектор (2) такой, что система (3) будет иметь нетривиальное решение $x = x(t)$ того же периода, причем матрица $\tilde{A}(t)$ имеет полный столбцовый ранг, т. е. имеет место равенство

$$\operatorname{rank}_{\mathrm{col}} \tilde{A} = n. \tag{5}$$

Разложим в ряд Фурье Ω-периодический вектор $x(t)$

$$x(t) \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m \exp\left(\frac{2\pi i m}{\Omega} t\right),$$

где

$$x_m = \frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} x(\tau) \exp\left(-\frac{2\pi i m}{\Omega} \tau\right) d\tau.$$

С учетом полученного разложения запишем произведение

$$\left(A(t) - \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} A(\tau) d\tau\right) x(t) \sim \left(A(t) - \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} A(\tau) d\tau\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m \exp\left(\frac{2\pi i m}{\Omega} t\right). \tag{6}$$

Разложим в ряд Фурье ω-периодическую матричную функцию

$$A(t) - \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} A(\tau) d\tau \sim \sum_{k=-\infty,\ k\neq 0}^{\infty} A_k \exp\left(\frac{2\pi i k}{\omega} t\right), \tag{7}$$

где

$$A_k = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} A(\tau) \exp\left(-\frac{2\pi i k}{\omega} \tau\right) d\tau.$$

Используя разложение (7), применим свойства формальных операций над рядами Фурье [9, с. 39] к произведению (6)

$$\left(A(t) - \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} A(\tau) d\tau\right) x(t) \sim \sum_{k,\ m=-\infty,\ k\neq 0}^{\infty} A_k x_m \exp\left(\frac{2\pi i k}{\omega} + \frac{2\pi i m}{\Omega}\right) t. \tag{8}$$

Запишем (8) в виде ряда

$$\left(A(t) - \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} A(\tau) d\tau\right) x(t) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \exp(2\pi i \lambda_j) t, \tag{9}$$

коэффициенты которого находятся следующим образом:

$$c_j = \sum_{\nu_k + \mu_m = \lambda_j} A_k x_m, \quad \nu_k = \frac{k}{\omega}, \quad \mu_m = \frac{m}{\Omega}, \tag{10}$$

т. е. c_j суммирует попарные произведения тех коэффициентов Фурье A_k и x_m, соответствующие которым числа ν_k и μ_m дают одинаковые равные λ_j суммы.

Покажем, что для каждой пары индексов k и m индекс j будет единственным, обеспечивающим равенство

$$\nu_k + \mu_m = \lambda_j.$$

Это значит, что каждая из сумм (10) будет состоять только из одного слагаемого при любых значениях индексов k и m. Допустим, что это не так, т. е. найдутся такие две пары индексов $k_1,\ m_1$ и $k_2,\ m_2$ ($k_1 \neq k_2,\ m_1 \neq m_2$), что выполняется равенство

$$\nu_{k_1} + \mu_{m_1} = \nu_{k_2} + \mu_{m_2},$$

из которого с учетом принятых обозначений получаем

$$\frac{k_1}{\omega} + \frac{m_1}{\Omega} = \frac{k_2}{\omega} + \frac{m_1}{\Omega}.$$

В силу того, что $k_1 - k_2 \neq 0$ и $m_1 - m_2 \neq 0$, из полученного равенства находим отношение периодов

$$\frac{\omega}{\Omega} = \frac{k_1 - k_2}{m_1 - m_2}.$$

Поскольку индексы $k_1,\ k_2,\ m_1,\ m_2$ – целые числа, то правая часть этого равенства является рациональным числом. Следовательно, периоды ω и Ω соизмеримы – получили противоречие.

Значит, сделанное допущение неверно и каждый определяемый соотношением (10) коэффициент c_j ряда (9) действительно будет состоять только из одного слагаемого.

Так как квазипериодическая система (3) имеет частично нерегулярное решение $x = x(t)$ и отношение ω/Ω иррационально, то согласно [10] вектор $x(t)$ удовлетворяет, в частности, тождеству

$$\left(A(t) - \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega A(\tau)d\tau\right) = \tilde{A}(t)x(t) \equiv 0. \tag{11}$$

С учетом тождества (11) для ряда (9) имеем представление

$$0 \equiv \left(A(t) - \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega A(\tau)d\tau\right)x(t) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \exp(2\pi i\lambda_j)t. \tag{12}$$

Из разложения в ряд (12) на основании теоремы единственности для почти периодических функций [9, с. 51] следует, что все коэффициенты этого ряда нулевые. Значит, нулевыми будут и коэффициенты ряда (9), т. е

$$A_k x_m = 0 \tag{13}$$

при всех $k = \pm1, \pm2, \ldots$ и $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Поскольку по предположению периодический вектор $x(t) \not\equiv 0$, то найдется по меньшей мере один из его коэффициентов Фурье, имеющий хотя бы одну ненулевую компоненту. Пусть это будет коэффициент x_s $(s \in \{0, N\})$. Применим свойства формальных операций над рядами Фурье [9, с. 39] к одному из слагаемых представления (6) при $m = s$, т. е. рассмотрим произведение

$$\left(A(t) - \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega A(\tau)d\tau\right)x_s \sim \sum_{k=-\infty,\ k\neq 0}^{\infty} A_k x_s \exp\left(\frac{2\pi i k}{\Omega}t\right).$$

Как показано выше, согласно (13) все произведения $P_k x_s = 0$ $(k = \pm1, \pm2, \ldots)$. Поэтому ввиду периодичности функции $\tilde{A}(t)x_s$ на основании [9, с. 51] и принятых обозначений имеем тождество

$$\tilde{A}(t)x_s \equiv 0, \quad x_s \neq 0,$$

из которого следует, что $\tilde{A}(t)$ – матрица неполного столбцового ранга. Имеем противоречие со сделанным в начале доказательства предположением (5) о линейной независимости столбцов этой матрицы. Значит, допущение (5) неверно и в случае разрешимости поставленной задачи управления системы (1) осциллирующая составляющая ее матрицы коэффициентов имеет неполный столбцовый ранг. Теорема доказана.

Заключение. Для линейной периодической системы управления с постоянной матрицей при управлении впервые поставлена задача управления асинхронным спектром с иррегулярным допустимым множеством и дано необходимое условие ее разрешимости.

Работа выполнена в Институте математики НАН Беларуси при поддержке БРФФИ (проект № Ф25КИ-015).

Литература

1. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975.

2. *Макаров Е. К., Попова С. Н.* Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск: Бел. навука, 2012.

3. *Деменчук А. К.* Задача управления спектром сильно нерегулярных периодических колебаний // Доклады НАН Беларуси. 2009. Т. 53, № 4. С. 37–42.

4. *Деменчук А. К.* Управление асинхронным спектром линейных систем с нулевым средним значением матрицы коэффициентов // Труды Института математики. 2018. Т. 26, № 1. С. 31–34.

5. *Деменчук А. К.* Управление асинхронным спектром линейных систем с невырожденным средним значением матрицы коэффициентов // Труды Института математики. 2020. Т. 28, № 1–2. С. 11–16.

6. *Деменчук А.К.* Управление асинхронным спектром линейных систем с невырожденным диагональным блоком усреднения матрицы коэффициентов // Труды Института математики. 2022. Т. 30, № 1–2. С. 22–29.

7. *Деменчук А. К.* Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Условия существования и управления. Saarbrucken: Lambert Academic Publishing, 2012.

8. *Demenchuk A. K.* Partially irregular almost periodic solutions of ordinary differential systems // Math. Bohemica. 2001. Vol. 126, N 1. P. 221–228.

9. *Левитан Б. М.* Почти периодические функции. М.: ГТТИ, 1953.

10. *Грудо Э. И., Деменчук А. К.* О периодических решениях с несоизмеримыми периодами линейных неоднородных периодических дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 3. С. 409–416.

References

1. Zubov V. I. *Lectures on Control Theory.* Moscow, Nauka, 1975 (in Russian).

2. Makarov E. K., Popova C. N. *Controllability of asymptotic invariants of non-stationary linear systems.* Minsk, Belaruskaya Navuka, 2012 (in Russian).

3. Demenchuk A. K. Problem of control of the spectrum of strongly irregular periodic oscillations. *Doklady NAN Belarusi*, 2009, vol. 53, no. 4, pp. 37–42 (in Russian).

4. Demenchuk A. K. Control of the asynchronous spectrum of linear systems with zero mean value of coefficient matrix. *Trudy Instituta Matematiki*, 2018, vol. 26, no. 1, pp. 31–34 (in Russian).

5. Demenchuk A. K. Control of the asynchronous spectrum of linear systems with non-degenerate mean value of coefficient matrix. *Trudy Instituta Matematiki*, 2020, vol. 28, no. 1–2, pp. 11–16 (in Russian).

6. Demenchuk A. K. Control of the asynchronous spectrum of linear systems with non-degenerate diagonal block of mean value of coefficient matrix. *Trudy Instituta Matematiki*, 2022, vol. 30, no. 1–2, pp. 22–29 (in Russian).

7. Demenchuk A. K. *Asynchronous Oscillations in Differential Systems. Conditions of Existence and Control.* Saarbrucken, Lambert Academic Publishing, 2012 (in Russian).

8. Demenchuk A. K. Partially irregular almost periodic solutions of ordinary differential systems. *Math. Bohemica*, 2001, vol. 126, no. 1, pp. 221–228.

9. Levitan B. M. *Almost Periodic Functions.* Moscow, GTTI, 1953 (in Russian).

10. Grudo E. I., Demenchuk A. K. On periodic solutions with incommensurate periods of linear inhomogeneous periodic differential systems. *Diff. Equations*, 1987, vol. 23, no. 3, pp. 409–416 (in Russian).