



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
MATHEMATICAL MODELING AND
NUMERICAL METHODS



УДК 619.63

О РЕАЛИЗАЦИИ СПЕКТРАЛЬНОГО МЕТОДА ЧЕБЫШЁВА ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СО СМЕШАННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В. М. Волков, Дун Цзинхуэй

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
e-mail: v.volkov@tut.by

Поступила: 13.08.2024

Исправлена: 15.11.2024

Принята: 12.12.2024

Ключевые слова: спектральный метод Чебышёва, эллиптические уравнения со смешанными производными, стабилизированный метод би-сопряженных градиентов, метод переменных направлений, алгоритм Бартелса–Стюарта.

Аннотация. Рассмотрены вопросы построения численных алгоритмов на основе спектрального метода Чебышёва для приближенного решения эллиптических уравнений со смешанными производными в прямоугольной области с однородными краевыми условиями Дирихле. Для реализации спектрального метода использован стабилизированный метод би-сопряженных градиентов с переобуславливателями в виде разностных или спектральных аналогов оператора Лапласа. Проведено сравнение эффективности обработки переобуславливателя с применением итерационного метода переменных направлений и алгоритма Бартелса–Стюарта. Представленные результаты показывают, что рассмотренные алгоритмы демонстрируют вычислительные характеристики, сопоставимые по времени вычислений на сетках одинаковой размерности с характеристиками разностных методов, однако многократно превосходят последние по точности в случае достаточно гладких решений.

ON THE IMPLEMENTATION OF THE CHEBYSHEV SPECTRAL METHOD FOR
TWO-DIMENSIONAL ELLIPTIC EQUATIONS WITH MIXED DERIVATIVES

V. M. Volkov, Dong JingHui

Belarusian State University, Minsk, Belarus
e-mail: v.volkov@tut.by

Received: 13.08.2024

Revised: 15.11.2024

Accepted: 12.12.2024

Keywords: Chebyshev spectral method, Elliptic equations with mixed derivatives, biconjugate gradient stabilized method, alternating directions implicit method, Bartels–Stewart algorithm.

Abstract. The issues of constructing numerical algorithms based on the Chebyshev spectral method for approximate solution of elliptic equations with mixed derivatives in a rectangular domain with homogeneous Dirichlet boundary conditions are considered. To implement the spectral method, the biconjugate gradients stabilized method with preconditioners in the form of finite difference or spectral analogs of the Laplace operator is used. A comparison of the efficiency of processing the preconditioner using the iterative method of alternating directions and the Bartels–Stewart algorithm is carried out. The presented results show that the considered algorithms demonstrate computational characteristics comparable in computation time on grids of the same dimension with the characteristics of difference methods, but they are many times superior to the latter in accuracy in the case of sufficiently smooth solutions.

1. Введение

Методы конечных разностей и конечных элементов характеризуются полиномиальной скоростью сходимости погрешности δ относительно шагов дискретизации h : $\delta(h) = O(h^p)$, где, как

правило, $p \leq 2$ [1; 2]. При этом, как в одномерном, так и в многомерных случаях, существуют прямые и итерационные алгоритмы реализации этих методов, обеспечивающие оптимальную вычислительную сложность, для которой характерен линейный (или близкий к линейному) рост вычислительных затрат в зависимости от общего количества узлов сетки N [3–5]. Для спектральных методов на основе полиномов Чебышёва [5; 6] при достаточной гладкости решения достигается экспоненциальная скорость сходимости $\delta(h) = O(h^N)$ [6, р. 25; 7, р. 48], однако их реализация более трудоемка. Атуальной задачей является разработка численных алгоритмов реализации спектральных методов, вычислительная сложность которых была бы в определенном смысле близка к оптимальной, как в методах конечных разностей и конечных элементов.

К настоящему времени достигнуты определенные успехи в разработке алгоритмов реализации спектральных методов для многомерных уравнений Пуассона. В случае двумерных задач в прямоугольной области дискретная спектральная модель, как и в разностном случае, сводится к системе матричных уравнений Ляпунова. Среди методов численного решения данного класса задач (см., например, обзор [8]) можно отметить методы переменных направлений [8–11], алгоритм Бателса–Стюарта [12], а также итерационные методы в подпространствах Крылова с переобуславливателем на основе метода переменных направлений [13; 14]. Сопоставимые по вычислительным затратам алгоритмы для двумерных эллиптических задач с переменными коэффициентами предложены в работе [15].

В настоящей работе дано обобщение итерационной техники реализации спектрального метода Чебышёва, развитой в работе [15], на случай уравнений со смешанными производными, что имеет важное значение при решении эллиптических задач в случаях неоднородных анизотропных сред и в областях сложной геометрии путем их конформного отображения в прямоугольник [16]. На примере модельной двумерной задачи с известными аналитическими решениями различной степени гладкости продемонстрировано, что, несмотря на более высокую вычислительную сложность, реальные вычислительные затраты предложенного итерационного алгоритма реализации спектрального метода Чебышёва на сетках одинакового размера сопоставимы по времени с аналогичным алгоритмом реализации разностного метода. При этом точность спектрального метода в случае решений, имеющих четыре и более непрерывных производных, превосходит точность разностного метода при равных временных затратах на реализацию данных методов.

2. Постановка задачи. Спектральный метод коллокации

Рассмотрим задачу Дирихле для эллиптического уравнения со смешанными производными в двумерной прямоугольной области:

$$\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yx} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y), \quad (2.1)$$

$$(x, y) \in \Omega = [-1, 1] \times [-1, 1], \quad u(\pm 1, y) = u(x, \pm 1) = 0. \quad (2.2)$$

Здесь коэффициенты $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ – достаточно гладкие функции переменных x, y , удовлетворяющие условию эллиптичности [1, с. 34]:

$$\sigma_{xy}^2(x, y) = \sigma_{yx}^2(x, y) < \sigma_{xx}(x, y) \sigma_{yy}(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (2.3)$$

Разностные методы для решения задачи (2.1)–(2.3) на квадратной сетке размерности $n \times n$ приводят к системе линейных алгебраических уравнений с семидиагональной матрицей, размера $N \times N$, где $N = (n - 2)^2$ – количество внутренних узлов сетки [1]. Для реализации систем разностных уравнений могут эффективно использоваться многосеточные итерационные методы [4] или итерационные методы в пространствах Крылова со спектрально оптимальным переобуславливателем [5].

Спектральные методы коллокации на основе полиномов Чебышёва требуют соответствующую неравномерную сетку [6]:

$$\omega = \left\{ (x_k, y_m), \quad x_k = \cos \left(\frac{\pi(k-1)}{n_x-1} \right), \quad y_m = \cos \left(\frac{\pi(m-1)}{n_y-1} \right), \quad k = \overline{1, n_x}, \quad m = \overline{1, n_y} \right\}. \quad (2.4)$$

Далее, для простоты, полагаем $n_x = n_y = n$.

Для перехода от дифференциальной задачи (2.1)–(2.3) к дискретной спектральной модели достаточно заменить производные в уравнении (2.1) на соответствующие матрицы спектрального дифференцирования с учетом краевых условий задачи [6]. В итоге задача сводится к системе алгебраических уравнений

$$A_s \bar{U} = F, \quad (2.5)$$

матрица которой имеет вид

$$A_s = A_{xx} + A_{yy} + A_{xy} + A_{yx},$$

где

$$\begin{aligned} A_{xx} &= \text{diag}(\sigma_{xx})(I \otimes \bar{D}^2) + \text{diag}(\partial_x \sigma_{xx})(I \otimes \bar{D}), \quad A_{yy} = \text{diag}(\sigma_{yy})(\bar{D}^2 \otimes I) + \text{diag}(\partial_y \sigma_{yy})(\bar{D} \otimes I), \\ A_{yx} &= \text{diag}(\sigma_{yx})(\bar{D} \otimes I)(I \otimes \bar{D}) + \text{diag}(\partial_y \sigma_{yx})(I \otimes \bar{D}), \\ A_{xy} &= \text{diag}(\sigma_{xy})(I \otimes \bar{D})(\bar{D} \otimes I) + \text{diag}(\partial_x \sigma_{xy})(\bar{D} \otimes I). \end{aligned}$$

Здесь $\bar{D}$, $\bar{D}^2 \in R^{(n-2) \times (n-2)}$ – матрицы дифференцирования Чебышёва первого и второго порядка соответственно (см., например, [5, р. 53]), в которых для учета однородных краевых условий удалены первые и последние строки и столбцы, $\text{diag}(\sigma_{xx})$, $\text{diag}(\sigma_{xy})$, $\text{diag}(\partial_x \sigma_{xx})$ и т. д. – диагональные матрицы коэффициентов задачи и их частных производных во внутренних узлах сетки, $\otimes$ – символ кронекеровского произведения матриц, $I \in R^{(n-2) \times (n-2)}$ – единичная матрица. Использование недивергентной формы дифференциальных операторов в данной дискретной модели позволяет упростить учет однородных краевых условий (2.2).

Несложно убедиться, что при наличии в уравнении смешанных производных системная матрица A_s дискретной спектральной модели (2.5) является полной, что практически исключает применение традиционных итерационных алгоритмов решения таких систем. Например, выполняемое на каждой итерации непосредственное умножение такой матрицы $A_s \in R^{N \times N}$ на вектор приближенного решения задачи $\bar{U} \in R^N$, $N = (n-2)^2$, требует $2N^2$ арифметических операций, что на порядок превосходит оптимальную вычислительную сложность алгоритма. В силу этого, по аналогии с [15], воспользуемся алгоритмом вычисления произведения матрицы A_s на вектор приближенного решения в виде суммы таких произведений для каждой составляющей дискретного аналога дифференциального оператора в отдельности:

$$A_s \bar{U} = \Re \{ D(S_{xx} * (DU)) + (S_{yy} * (UD^T)) D^T + (S_{yx} * (DU)) D^T + D(S_{xy} * (UD^T)) \}. \quad (2.6)$$

Здесь $D \in R^{n \times n}$ – матрица спектрального дифференцирования Чебышёва, S_{xx} , S_{yy} , S_{xy} , $S_{yx} \in R^{n \times n}$ – двумерные массивы (матрицы) значений соответствующих коэффициентов уравнения (2.1) в точках сетки (2.4), символ $*$ обозначает поэлементное умножение массивов, а символ $\Re$ – удаление граничных точек массива и последующую трансформацию его в вектор столбец ($R^{(n-2) \times (n-2)} \rightarrow R^{(n-2)^2}$). Вычислительные затраты на реализацию (2.6) составляют $16n^3 + 4n^2 \simeq O(N\sqrt{N})$ арифметических операций, что существенно меньше, чем при непосредственном умножении $A_s \bar{U}$. При отсутствии смешанных производных формула (2.6) сохраняет эффективность при вычислении произведения системной матрицы на вектор приближенного решения [15].

Таким образом, спектральный метод Чебышёва для задачи (2.1)–(2.3) при стандартной формулировке дискретной модели приводит к системе линейных алгебраических уравнений (2.5) с полной матрицей $A_s \in R^{N \times N}$, однако при итерационной реализации данной системы нам не требуется явного вычисления самой матрицы A_s , а достаточно реализовать лишь умножение данной матрицы на вектор решения согласно формуле (2.6).

3. Итерационная реализация спектрального метода

Для реализации спектрального метода Чебышёва воспользуемся стабилизированной версией итерационного метода би-сопряженных градиентов (Bi-Conjugate Gradient – biCG) с переобуслови-

вателем [17]. Выбор данного метода обусловлен его высокой эффективностью при решении больших систем линейных алгебраических уравнений с несимметричной матрицей [13; 18], а также наличием доступной программной реализации в виде функции `bicgstab` математического пакета MATLAB.

Используем двухэтапное переобусловливание системы. На первом этапе задействуем диагональный переобусловливатель, элементы которого для каждого узла сетки (x_k, y_m) вычисляются следующим образом:

$$S = \{\sigma_{j,j}\} = \text{Sp} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

или

$$S = \{\sigma_{j,j}\} = \text{Sp} \left(M_{km}^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} M_{km} \right), \quad (3.2)$$

где $M_{km} \in R^{2 \times 2}$ – матрицы преобразования подобия, приводящие матрицы коэффициентов в соответствующих узлах сетки к диагональному виду, а компоненты σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} , σ_{yx} – значения соответствующих коэффициентов в точках (x_k, y_m) , для которых $j = k + m(k - 1)$.

Элементы матрицы S согласно (3.2) численно равны собственным значениям матриц коэффициентов, что не требует существенных дополнительных вычислительных затрат по сравнению с (3.1), и в экспериментах показывает несколько большую эффективность в снижении количества итераций метода biCG. Данный переобусловливатель может быть применен непосредственно к системе алгебраических уравнений (2.5) до начала итерационного процесса.

На втором этапе применим переобусловливатель в виде дискретного аналога оператора Лапласа, построенного на основе конечно-разностной или спектральной аппроксимации с учетом краевых условий задачи. Для обработки данного переобусловливателя на каждой итерации biCG требуется решение системы алгебраических уравнений, которую удобно представить в виде матричной системы Ляпунова:

$$PU + UP^T = F, \quad (3.3)$$

где $U, P \in R^{(n-2) \times (n-2)}$ – массив решения и матрица переобусловливателя. Для конечно-разностного переобусловливателя спектрального метода Чебышёва $P = P_{FD}$, P_{FD} – трехдиагональная матрица второй разностной производной на неравномерной сетке вида (2.4), или $P = \overline{D}^2$, $\overline{D}^2$ – спектральная матрица дифференцирования Чебышёва второго порядка, в которой удалены первые и последние строки и столбцы. Для переобусловливателя разностного метода $P = \overline{P}_{FD}$, $\overline{P}_{FD}$ – трехдиагональная матрица второй разностной производной на равномерной сетке. Для решения матричной системы Ляпунова (3.3) можно эффективно использовать итерационный метод переменных направлений с оптимальным набором итерационных параметров [3], а также алгоритм Бартелса–Стюарта [17]. Эффективность данных методов в случае двумерных эллиптических задач с переменными коэффициентами показана в работе [15]. Ниже проанализированы возможности столь же эффективного использования данного подхода для уравнений со смешанными производными.

4. Результаты численных экспериментов

Рассмотрим модельную задачу, на примере которой сравним эффективность изложенного выше спектрального метода Чебышёва с аналогичным подходом, основанным на методе конечных разностей. В качестве разностного метода, использованного в численных экспериментах, взяты разностные схемы [18; 19]. Реализация разностного метода проводилась аналогично, как и для спектрального метода, с помощью стабилизированного итерационного алгоритма би-сопряженных градиентов с переобусловливателем. Критерий остановки итераций определялся значением относительной нормы невязки $\|r\|/\|f\| < \varepsilon = 10^{-10}$.

Вначале рассмотрим случай гладких коэффициентов:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(x, y) &= \sigma_{yy}(x, y) = \alpha + \cos(\pi x) + \cos(\pi y), \\ \sigma_{xy}(x, y) &= \sigma_{yx}(x, y) = \alpha^{-1} (\cos(\pi x) - \cos(\pi y)), \quad \alpha > 1.\end{aligned}\quad (4.1)$$

Правая часть уравнения такова, что бесконечно дифференцируемое аналитическое решение задачи имеет вид

$$u(x, y) = \sin^2(m_x \pi x) \sin^2(m_y \pi y). \quad (4.2)$$

Для определенности полагаем $\alpha = 3$, $m_x = m_y = 1$. Для рассмотренного случая максимальный коэффициент анизотропии $\xi \simeq 1,57$, а коэффициент неоднородности $\psi = 5$, где ξ и ψ определяются отношениями:

$$\xi = \max_{\omega} \frac{\max(\lambda(s))}{\min(\lambda(s))}, \quad \psi = \max_{\omega} \frac{\max \sqrt{\lambda_1^2(s) + \lambda_2^2(s)}}{\min \sqrt{\lambda_1^2(s) + \lambda_2^2(s)}}, \quad s = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix},$$

где $\lambda(s) = \{\lambda_1(s), \lambda_2(s)\}$ – собственные значения матрицы коэффициентов задачи s .

Вид решения задачи и зависимость относительной среднеквадратичной погрешности спектрального и разностного методов, $\delta = \|U - u\|/\|u\|$, представлены на рис. 1. Как видно из рисунка, для спектрального метода предельная точность, $\delta < 10^{-10}$, ограниченная преимущественно вычислительной погрешностью, достигается при наличии примерно 15 узлов сетки на один период волнообразного гладкого решения. В то же время разностный метод второго порядка точности на такой сетке имеет относительную погрешность всего лишь $\delta \simeq 10^{-2}$.

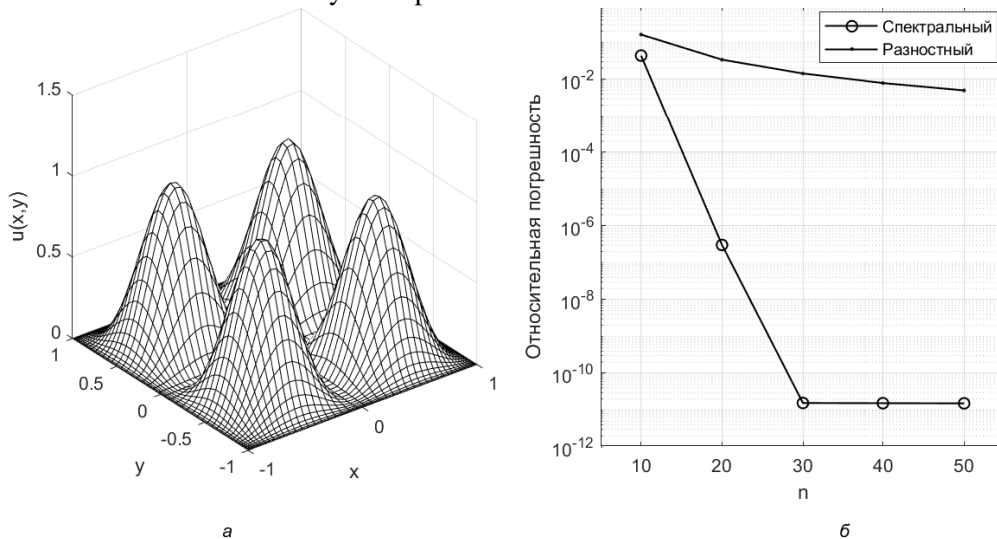


Рис. 1. Вид решения задач (2.1), (2.2), (4.1), (4.2) (а); зависимость относительной погрешности приближенного решения спектрального и разностного методов от количества узлов сетки n (б)

Далее остановимся более подробно на сравнении эффективности реализации спектрального и разностного методов. Прежде всего отметим некоторые особенности использования для реализации дискретных моделей двух вложенных итерационных методов, в качестве которых роль внешней процедуры играет стабилизированный метод би-сопряженных градиентов, а внутренний итерационный процесс для обработки переобусловливателя основан на методе переменных направлений. За основу алгоритма стабилизированного метода би-сопряженных градиентов взята соответствующая функция цифрового пакета MATLAB `bicgstab`, в которой для случая спектрального метода модифицирована процедура умножения системной матрицы на вектор приближенного решения задачи согласно (3.1), а также процедура обработки переобусловливателя. В частности, используя матричную форму двумерной задачи с постоянными коэффициентами (3.3), векторизованный

алгоритм итерационного метода переменных направлений имеет вид:

$$S_k^- U_{k+1/2} = U_k S_k^{+T} + F, \quad U_{k+1} S_k^{-T} = S_k^+ U_{k+1/2} + F, \quad k = 0, 2, \dots, K, \quad (4.3)$$

где $S_k^\pm = \omega_{k+1} E \pm P$, $E \in R^{(n-2) \times (n-2)}$ – единичная матрица, P – трехдиагональная матрица второй разностной производной на сетке (2.4) в случае спектрального метода или равномерной сетке для разностного метода, ω_{k+1} , $k = \overline{1, K}$, – оптимальный набор итерационных параметров метода переменных направлений (см., например, [3, с. 438]):

$$\omega_k = \chi_k = \Delta \operatorname{dn} \left(\frac{2k-1}{2K} F(\pi/2, \eta'), \eta' \right). \quad (4.4)$$

Здесь $\operatorname{dn}(x, \eta)$ – эллиптическая функция аргумента x и модуля η , $F(\pi/2, \eta)$ – полный нормальный эллиптический интеграл Лежандра первого рода, $\eta = \delta/\Delta$, $\eta' = \sqrt{1 - \eta^2}$, δ и Δ – нижняя и верхняя границы спектра матрицы P соответственно.

Минимальное количество итераций метода переменных направлений (4.3)–(4.4) для достижения точности ε удовлетворяет оценке [3, с. 439]:

$$K \geq K_0 = \pi^{-1} \ln(4\eta^{-1}) \ln(4\varepsilon^{-1}). \quad (4.5)$$

Согласно (4.5) при $n = 300$ и $\varepsilon = 10^{-10}$ минимальное количество итераций $K_0 = 49$. Тем не менее, как показано в работе [13] на примере численного решения обобщенных матричных уравнений Ляпунова, и при реализации спектрального метода Чебышёва для двумерного эллиптического уравнения с переменными коэффициентами [15], 4-5 внутренних итераций метода переменных направлений оказывается достаточным для сходимости внешнего итерационного процесса в подпространствах Крылова, и при этом обеспечиваются минимальные вычислительные затраты на реализацию алгоритма в целом. Согласно результатам численных экспериментов для задачи (2.1), (2.2), (4.1), (4.2), оптимальное число внутренних итераций метода переменных направлений, обеспечивающее минимизацию вычислительных затрат для разностного метода $K_{\text{opt}} = 4$, а для спектрального метода $K_{\text{opt}} = 6$. Полученные эмпирические оптимальные значения количества внутренних итераций метода переменных направлений практически не зависят ни от размерности сетки в пределах $n \leq 300$, ни от характеристик неоднородности и анизотропии коэффициентов задачи ξ и ψ .

Количество итераций метода би-сопряженных градиентов с переобусловливателем на основе разностного аналога оператора Лапласа, обрабатываемого методом переменных направлений (4.3), (4.4), $K = K_{\text{opt}}$, и удельное время итерационной реализации спектрального и разностного методов для задачи (2.1), (2.2), (4.1), (4.2) в зависимости от количества узлов сетки n представлены на рис. 2. Отметим, что вычислительные затраты на одну итерацию имеют порядок $O(n^2)$ для разностного метода, а для спектрального метода – $O(n^3)$. Поскольку рост количества итераций с возрастанием размерности сетки в пределах $n = 50 \div 300$ практически отсутствует, то вычислительная сложность рассматриваемых алгоритмов в целом имеет тот же порядок, что и для одной итерации.

Обработка переобуславливателя на основе разностного аналога оператора Лапласа при фиксированном количестве внутренних итераций имеет вычислительную сложность $O(n^2)$. При размерности сетки в пределах $50 \leq n \leq 300$, как при реализации разностного, так и в случае спектрального методов, на данную процедуру приходится больше половины всех вычислений. В силу этого, при существенных отличиях в асимптотических оценках вычислительной сложности спектрального и разностного алгоритмов в целом, наблюдаются не столь значительные отличия фактических удельных вычислительных затрат на их реализацию, поскольку наибольшие затраты приходится на реализацию переобусловливателя и разностный метод выигрывает в скорости за счет меньшего числа итераций.

Анализируя результаты численных экспериментов, представленные на рис. 2, можно отметить, что рост удельных вычислительных затрат заметно отстает от асимптотических оценок вычислительной сложности как для разностного, так и для спектрального методов. Это можно объяснить увеличением производительности процессора при выполнении векторных операций с увеличением размерности массивов данных, а также снижением относительной доли накладных расходов. С этим

связано также аномальное падение удельного времени выполнения спектрального алгоритма в при $n = 60 \div 120$ и разностного метода во всем диапазоне рассмотренных размерностей сетки.

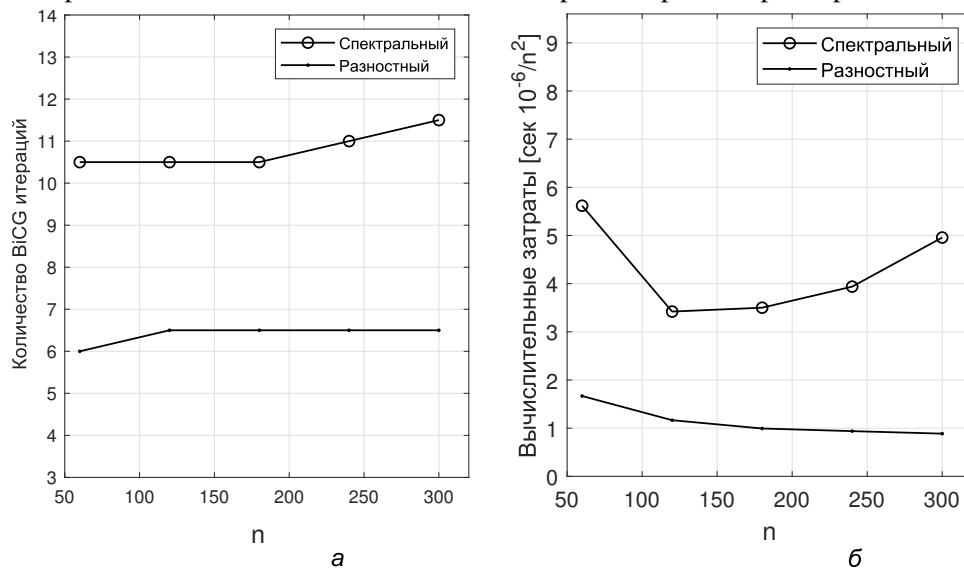


Рис. 2. Зависимость количества итераций метода би-сопряженных градиентов с разностным переобусловливателем на основе МПН от количества узлов сетки n (а); удельное время итерационной реализации спектрального и разностного методов в зависимости от количества узлов сетки n (б)

Следует отметить также, что стабильная работа рассмотренных алгоритмов наблюдается лишь при размерности сетки $n \leq 300$. В случае $n \geq 350$ стабилизированный итерационный метод би-сопряженных градиентов при реализации спектральной версии алгоритма не сходится даже при количестве внутренних итераций метода переменных направлений $K \geq 50$, что достаточно для достижения точности $\epsilon = 10^{-10}$ при обработке переобусловливателя.

Рассмотрим альтернативный подход, основанный на обработке переобусловливателя с использованием алгоритма Бартелса–Стюарта [12], реализованного в соответствующей функции luар пакета MATLAB. Важно отметить, что при решении матричного уравнения вида (3.3) около 75 % вычислительных затрат алгоритма Бартелса–Стюарта приходится на разложение Шура матрицы P (случай не симметричной матрицы P):

$$P = QRQ^T, \quad (4.6)$$

где Q – унитарная матрица, R – верхняя треугольная матрица. В силу этого непосредственное использование функции luар на каждой итерации метода би-сопряженных градиентов представляется не рациональным. Для повышения эффективности алгоритма матричные компоненты разложения Шура (4.6) Q и R могут быть предвычислены до начала итераций, что позволяет многократно сократить затраты на обработку переобусловливателя.

На рис. 3 представлены результаты численных экспериментов для модельной задачи (2.1), (2.2), (4.1), (4.2), полученные посредством спектрального и разностного методов с описанной выше альтернативной техникой обработки переобусловливателя. Удельные вычислительные затраты для разностного метода практически не отличаются количественно от соответствующих результатов, представленных на рис. 2. Вместе с тем модифицированный разностный алгоритм проигрывает качественно, поскольку использование метода Бартелса–Стюарта повышает его вычислительную сложность, что подтверждается ростом удельных вычислительных затрат при возрастании размерности сетки n (рис. 3, б).

Для спектрального метода модифицированный алгоритм имеет в целом ту же вычислительную сложность, что и при использовании разностного переобусловливателя, обрабатываемого методом переменных направлений. При этом уменьшается общее число итераций и полностью устраняется их зависимость от размерности сетки, что позволяет в итоге примерно в полтора раза сократить удельные вычислительные затраты по сравнению со случаем разностного переобусловливателя, обрабатываемого методом переменных направлений (см. рис. 2 и 3). Количество итераций метода

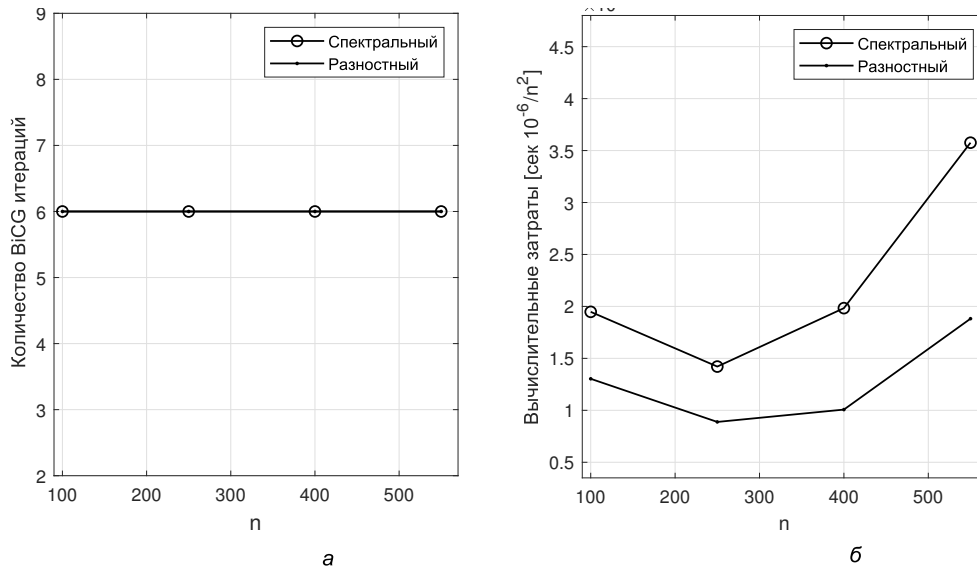


Рис. 3. Зависимость количества итераций метода би-сопряженных градиентов с обработкой переобусловливателя на основе алгоритма Бартелса–Стюарта от количества узлов сетки n (а); удельное время итерационной реализации спектрального и разностного методов в зависимости от количества узлов сетки n (б)

би-сопряженных градиентов для спектральной и разностной версий алгоритма с соответствующими переобусловливателями совпадает. Наиболее значимое преимущество модифицированного спектрального алгоритма состоит в стабильной сходимости итераций при достаточно большой размерности сетки. Относительно эффективности спектрального и разностного методов для задач с достаточно гладким решением докажем следующее.

Утверждение. Рассмотрим два метода решения двумерной эллиптической задачи (2.1)–(2.3), имеющей достаточную гладкость коэффициентов и решения:

I. Разностный метод второго порядка точности, для которого погрешность $\delta_1 = c_1 n^{-2}$, а вычислительная сложность $M_1 = Q_1 n^2$;

II. Спектральный метод, имеющий экспоненциальную скорость сходимости, $\delta_2 = \exp(-c_2 n)$, и вычислительную сложность $M_2 = Q_2 n^3$.

Здесь c_1, c_2, Q_1, Q_2 – положительные постоянные, не зависящие от n .

Для достижения достаточно малой погрешности приближенного решения, $\delta < \varepsilon_0$, вычислительные затраты разностного метода I превосходят соответствующие вычислительные затраты спектрального метода II.

Доказательство. Размерности сетки $n = n_1$ и $n = n_2$, обеспечивающие соответственно одинаковую погрешность методов I и II, удовлетворяют приближенному равенству $n_1 \simeq \sqrt{c_1} \exp(c_2 n_2 / 2)$. Несложно убедиться, что для положительной, монотонно убывающей функции $\theta(n_2) = M_2(n_2) / M_1(n_1(n_2))$, описывающей отношение вычислительных затрат спектрального и разностного методов для достижения фиксированной погрешности, имеем

$$\theta(n) = \frac{Q_2 n^2}{Q_1 \sqrt{c_1^3} \exp(3c_2 n / 2)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \theta(n) = 0. \quad (4.7)$$

В силу (4.7) всегда найдется такое значение n_0 , для которого $\theta(n \geq n_0) < 1$, при этом $\varepsilon_0 = c_1 / n_0^2$, что и требовалось доказать.

Полученные оценки согласуются с данными численных экспериментов. В частности, для дифференциальных задач, решение которых $u \in C^\infty$, спектральный метод Чебышёва превосходит в эффективности метод конечных разностей при любых требованиях точности, т. е. $\forall n > 2$, $\theta(n) < 1$ (см. рис. 4).

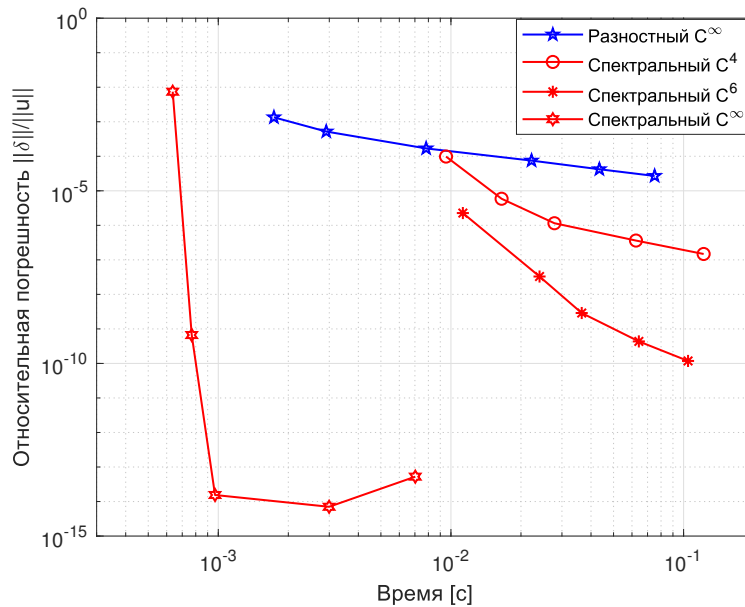


Рис. 4. Зависимости погрешностей спектрального и разностного методов от вычислительных затрат с ростом размерности сетки для решений, обладающих различной степенью гладкости

Для сравнительного анализа эффективности спектрального и разностного методов при пониженных требованиях к гладкости решения рассмотрим пример задачи (2.1), (2.2), в которой коэффициенты заданы кусочно-постоянными функциями:

$$\sigma_{xy}(x, y) = \sigma_{yx}(x, y) = 0, \sigma_{xx}(x, y) = \sigma_{yy}(x, y) = \begin{cases} 1 + d, & xy \geq 0, \\ 1, & xy < 0, \end{cases}$$

а правая часть уравнения (2.1) такова, что ее решение имеет вид

$$u(x, y) = \begin{cases} (\sin(\pi x) \sin(\pi y))^p, & xy > 0, \\ (\sin(\pi x) \sin(\pi y))^{p+d}, & xy \leq 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

Для $p \geq 1$, в случае $d = 0$ и $d = 1$ решение (4.8) $u(x, u) \in C^\infty(\Omega)$ и $u(x, u) \in C^{p-1}(\Omega)$ соответственно.

На рис. 4 приведены результаты численных экспериментов, показывающие скорость сходимости спектрального и разностного методов в зависимости от вычислительных затрат (времени реализации задачи) для решений, обладающих различной гладкостью. Характеристики разностного метода представлены только для решений класса C^∞ в силу того, что при понижении гладкости решения вплоть до класса C^4 скорость сходимости разностного решения практически не меняется. Из рисунка видно, что для рассмотренных классов решений, имеющих четыре и более непрерывных производных спектральный метод демонстрирует заметное преимущество в сравнении с разностным, и данное преимущество прогрессирует с ростом гладкости решения задачи.

5. Заключение

В контексте общей дискуссии о разработке быстрых алгоритмов реализации спектральных методов решения двумерных краевых задач для эллиптических уравнений, проведем сравнительный анализ представленных выше результатов с аналогичными исследованиями других авторов.

За редким исключением, большинство исследований посвящено разработке быстрого спектрального солвера для уравнения Пуассона в прямоугольной области. В этом случае дискретная модель дифференциальной задачи как в разностном, так и в спектральном подходах сводится к решению матричной системы Ляпунова (Сильвестра–Ляпунова). Среди последних результатов можно отметить работу [11], где на основе факторизованной схемы переменных направлений предложен эффективный алгоритм реализации спектрального метода Чебышёва для уравнения Пуассона с близкой к оптимальной вычислительной сложностью порядка $O(n^2 \log n)$. Доступность программной реализации данного алгоритма позволила провести непосредственное сравнение его

эффективности с эффективностью представленных выше алгоритмов для двумерных эллиптических задач общего вида на одинаковой вычислительной платформе. При $n = 100 \div 600$ время решения задачи для уравнения Пуассона с использованием методики [11] примерно в $7 \div 8$ раз меньше, нежели рассмотренный выше алгоритм для задач общего вида (см. рис. 3). Однако методика [11] исключает непосредственное ее использование для решения эллиптических задач общего вида (2.1)–(2.3). Если рассматривать методику [11] в качестве алгоритма обработки спектрального переобусловливателя для итерационных методов в подпространствах Крылова, то важно отметить дополнительные вычислительные затраты, возникающие при решении эллиптических задач общего вида. Во-первых, на контуре внешнего итерационного процесса возникнет необходимость вычислять произведение системной матрицы на вектор приближенного решения, что в подобных алгоритмах составляет около 30 % общих вычислительных затрат даже без учета смешанных производных (см., например [15]). Во-вторых, общее время реализации алгоритма возрастает пропорционально количеству внешних итераций по сравнению с временем реализации одной итерации.

Таким образом, представленный в работе итерационный алгоритм реализации спектрального метода Чебышёва для двумерных эллиптических уравнений со смешанными производными имеет вычислительную сложность $O(n^3)$, которая, с одной стороны, представляется субоптимальной в концептуальном смысле [5]. Однако, с другой стороны, возможности улучшения эффективности универсального двумерного спектрального итерационного солвера имеют, по-видимому, принципиальные ограничения, связанные с необходимостью умножения матрицы дифференцирования Чебышёва на матрицу (двумерный массив) приближенного решения задач, что требует порядка $O(n^3)$ арифметических операций. Использование для этих целей алгоритма быстрого дискретного преобразования Фурье позволяет снизить асимптотическую оценку вычислительных затрат до уровня $O(n^2 \log n)$, однако, это дает возможность получить фактическое преимущество лишь при $n \geq 1000$.

Авторы выражают благодарность Е. В. Прокониной, предоставившей программную реализацию алгоритма расчета системной матрицы для разностного метода решения двумерного уравнения Пуассона со смешанными производными.

Литература

1. Самарский А. А., Андреев В. Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976.
2. Ciarlet P. G. The finite element method for elliptic problems // Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.
3. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
4. Hackbusch W. Multi-grid methods and applications. Springer Science. Business Media, 2013. Vol. 4.
5. D'yakonov E. G. Optimization in solving elliptic problems. CRC Press, 2018.
6. Boyd J. P. Chebyshev and Fourier spectral methods. Courier Corporation, 2001.
7. Trefethen L. N. Spectral Methods in MATLAB. Philadelphia: SIAM, 2000.
8. Simoncini V. Computational methods for linear matrix equations // SIAM REVIEW. 2016. Vol. 58, N 3. P. 377–441.
9. Peaceman D. W., Rachford Jr H. H. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. 1955. Vol. 3, N 1. P. 28–41.
10. Benner P., Li R. C., Truhar N. On the ADI method for Sylvester equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2009. Vol. 233, N 4. P. 1035–1045.
11. Fortunato D., Townsend A. Fast Poisson solvers for spectral methods // IMA Journal of Numerical Analysis. 2020. Vol. 40, N 3. P. 1994–2018.
12. Bartels R. H., Stewart G. W. Algorithm 432 [C2]: Solution of the matrix equation $AX + XB = C$ [F4] // Communications of the ACM. 1972. Vol. 15, N 9. P. 820–826.
13. Damm T. Direct methods and ADI preconditioned Krylov subspace methods for generalized Lyapunov equations // Numerical Linear Algebra with Applications. 2008. Vol. 15, N 9. P. 853–871.
14. Jbilou K. ADI preconditioned Krylov methods for large Lyapunov matrix equations // Linear algebra and its applications. 2010. Vol. 432, N 10. P. 2473–2485.
15. Волков В. М., Качаловская Е. И. Итерационная реализация спектрального метода Че-

бышёва для двумерных эллиптических уравнений с переменными коэффициентами // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2023. № 3. С. 53–62.

16. Orszag S. A. Spectral methods for problems in complex geometrics // Numerical methods for partial differential equations. Academic Press, 1979. P. 273–305.

17. Van der Vorst H. A. Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems // SIAM Journal on scientific and Statistical Computing. 1992. Vol. 13, N 2. P. 631–644.

18. Волков В. М., Проконина Е. В. Разностные схемы и итерационные методы для многомерных эллиптических уравнений со смешанными производными // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. 2019. Т. 54, № 4. С. 454–459.

19. Самарский А. А., Мажукин В. И., Матус П. П., Шишкин Г. И. Монотонные разностные схемы для уравнений со смешанными производными // Математическое моделирование. 2001. Т. 13, № 2. С. 17–26.

References

1. Samarski A. A., Andreev V. B. *Finite-difference methods for elliptical equations*. Moscow, Nauka, 1976 (in Russian).

2. Ciarlet P. G. *Finite element method for elliptic problems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.

3. Samarski A. A., Nikolaev E. S. *Methods for Solving Grid Equations*. Moscow, Nauka, 1978 (in Russian).

4. Hackbusch W. *Multi-grid methods and applications*. Springer Science, Business Media, 2013, vol. 4.

5. D'yakonov E. G. *Optimization in solving elliptic problems*. CRC Press, 2018.

6. Boyd J. P. *Chebyshev and Fourier spectral methods*. Courier Corporation, 2001.

7. Trefethen L. N. *Spectral Methods in MATLAB*. Philadelphia, SIAM, 2000.

8. Simoncini V. *Computational methods for linear matrix equations*. SIAM REVIEW, 2016, vol. 58, no. 3, pp. 377–441.

9. Peaceman D. W., Rachford Jr H. H. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1955, vol. 3, no. 1, pp. 28–41.

10. Benner P., Li R. C., Truhar N. On the ADI method for Sylvester equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2009, vol. 233, no. 4, pp. 1035–1045.

11. Fortunato D., Townsend A. Fast Poisson solvers for spectral methods. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 2020, vol. 40, no. 3, pp. 1994–2018.

12. Bartels R. H., Stewart G. W. Algorithm 432 [C2]: Solution of the matrix equation $AX + XB = C$ [F4]. *Communications of the ACM*, 1972, vol. 15, no. 9, pp. 820–826.

13. Damm T. Direct methods and ADI preconditioned Krylov subspace methods for generalized Lyapunov equations. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 2008, vol. 15, no. 9, pp. 853–871.

14. Jbilou K. ADI preconditioned Krylov methods for large Lyapunov matrix equations. *Linear algebra and its applications*, 2010, vol. 432, no. 10, pp. 2473–2485.

15. Volkov V. M., Kachaloukaya E. I. An iterative Chebyshev spectral solver for two-dimensional elliptic equations with variable coefficients. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2023, iss. 3, pp. 53–62 (in Russian).

16. Orszag S. A. Spectral methods for problems in complex geometrics. *Numerical methods for partial differential equations*. Academic Press, 1979, pp. 273–305.

17. Van der Vorst H. A. Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 1992, vol. 13, no. 2, pp. 631–644.

18. Volkov V. M., Prakonina A. U. Finite-difference schemes and iterative methods for multidimensional elliptic equations with mixed derivatives. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 54, iss. 4, pp. 454–459 (in Russian).

19. Samarskii A. A., Mazhukin V. I., Matus P. P., Shishkin G. I. Monotone difference schemes for equations with mixed derivatives. *Mathematical Modeling*, 2001, vol. 13, iss. 2, pp. 17–26.