Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2024. Том 32. № 2. С. 73–81

УДК 517.968.7

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ, СВЯЗАННОЕ С КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕЙ РИМАНА–КАРЛЕМАНА

А. П. Шилин

Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь
e-mail: a.p.shilin@gmail.com

Поступила: 09.10.2024 **Исправлена:** 05.12.2024 **Принята:** 12.12.2024

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, гиперсингулярный интеграл, обобщенные формулы Сохоцкого, краевая задача Римана–Карлемана, линейное дифференциальное уравнение.

Аннотация. Рассматривается линейное интегро-дифференциальное уравнение на замкнутой кривой, расположенной на комплексной плоскости. Коэффициенты уравнения имеют специальную структуру. Уравнение содержит регулярные и гиперсингулярные интегралы и сводится вначале к смешанной краевой задаче Римана–Карлемана для аналитических функций. Далее решаются два дифференциальных уравнения в областях комплексной плоскости с дополнительными условиями. Указываются в явном виде условия разрешимости исходного уравнения. При их выполнении решение дается в замкнутой форме. Приводится пример.

INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION ASSOCIATED WITH THE RIEMANN–CARLEMAN BOUNDARY VALUE PROBLEM

A. P. Shilin

Belarusian State University, Minsk, Belarus
e-mail: a.p.shilin@gmail.com

Received: 09.10.2024 **Revised:** 05.12.2024 **Accepted:** 12.12.2024

Keywords: integro-differential equation, hypersingular integral, generalized Sokhotsky formulas, Riemann–Carleman boundary problem, linear differential equation.

Abstract. We consider a linear integro-differential equation on a closed curve located on the complex plane. The coefficients of the equation have a special structure. The equation is first reduced to the mixed Riemann–Carleman boundary value problem for analytic functions. Next, two differential equations are solved in areas of the complex plane with additional conditions. The conditions for the solvability of the original equation are indicated explicitly. When they executed, the solution is given in closed form. An example is given.

1. Введение

Пусть L – простая гладкая замкнутая положительно ориентированная кривая на комплексной плоскости. Под гладкостью кривой понимается наличие у нее непрерывно меняющейся касательной без точек заострения. Обозначим D_+ и D_- соответственно внутренность и внешность этой кривой. Зададим комплексные числа a_k, b_k, $k=\overline{0,n}$, $n\in\mathbb{N}$, $a_n\neq 0$, $b_n\neq 0$. Зададим также H-непрерывную (т. е. удовлетворяющую условию Гельдера) функцию $h(t)$, $t\in L$. Искомой будет в дальнейшем функция $\varphi(t)$, $t\in L$, H-непрерывная вместе со своими производными, входящими в уравнение. Производные этой функции находятся по ее комплексному аргументу $t\in L$.

Для предельных значений на кривой L интеграла типа Коши

$$\Phi_\pm(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-z},\quad z\in D_\pm,$$

и его производных справедливы полученные в [1] обобщенные формулы Сохоцкого

$$\Phi_\pm^{(k)}(t)=\pm\frac{1}{2}\varphi^{(k)}(t)+\frac{k!}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{k+1}},\quad k=\overline{0,n},\quad t\in L, \tag{1.1}$$

частным случаем которых при $k=0$ являются классические формулы Сохоцкого. Гиперсингулярные интегралы в формулах (1.1) понимаются в смысле конечной части по Адамару, что согласно [1] приводит для их вычисления к формулам

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{k+1}} = \frac{\pi i \varphi^{(k)}(t)}{k!} + \int_L \frac{\varphi(\tau) - \sum_{j=0}^{k} \frac{\varphi^{(j)}(t)}{j!}(\tau-t)^j}{(\tau-t)^{k+1}} d\tau,$$

в правых частях которых интегралы сходятся в обычном смысле. В [2] с использованием формул (1.1) решено в замкнутой форме уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} \left(a_k \varphi^{(k)}(t) + \frac{b_k k!}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{k+1}} \right) = h(t), \quad t \in L. \tag{1.2}$$

В [3–5] и некоторых других работах автора уравнение вида (1.2) решено для частных случаев переменных коэффициентов. В настоящей работе будет решено новое гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение, важной особенностью которого является добавление в его левую часть также регулярных интегралов с искомой функцией. В интегральных уравнениях с сингулярными интегралами такие добавки (с которыми уравнения называются полными) совсем в немногих случаях позволяют провести исчерпывающее конструктивное исследование уравнения. Подобные же «полные гиперсингулярные уравнения» ранее, видимо, нигде не изучались.

2. Исходное уравнение и его связь с краевой задачей

Зададим также H-непрерывные функции $a(t) \neq 0$, $b(t) \neq 0$, $t \in L$. Предположим, что кривая L лежит целиком по одну из сторон относительно какой-либо прямой, проходящей через точку $z=0$. Будем решать уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} \left[(a(t)a_k + b(t)b_k)\,\varphi^{(2k)}(t) + \frac{(a(t)a_k - b(t)b_k)(2k)!}{\pi i} \left(\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{2k+1}} + \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau+t)^{2k+1}} \right) \right] = \\ = h(t), \quad t \in L. \tag{2.1}$$

Обозначим D_+^* и L^* область и кривую, симметричные относительно точки $z=0$ соответственно области D_+ и кривой L, а $D_* = D_- \backslash (L^* \bigcup D_+^*)$ – область с симметрией относительно точки $z=0$. Введем функции

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau + z} = \begin{cases} \Psi_+(z), & z \in D_+, \\ \Psi_*(z), & z \in D_*. \end{cases}$$

Функция $\Psi_+(z)$ будет аналитической в области D_+, а функция $\Psi_*(z)$ будет четной аналитической функцией в области D_*, причем $\Psi_*(\infty)=0$. Для предельных значений на кривой L этих функций и их производных можно записать формулы

$$\Psi_+^{(2k)}(t) = \frac{1}{2}\varphi^{(2k)}(t) + \frac{(2k)!}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{2k+1}} + \frac{(2k)!}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau+t)^{2k+1}}, \tag{2.2}$$

$$\Psi_*^{(2k)}(t) = -\frac{1}{2}\varphi^{(2k)}(t) + \frac{(2k)!}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{2k+1}} + \frac{(2k)!}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau+t)^{2k+1}}, \quad k=\overline{0,n}, \quad t \in L, \tag{2.3}$$

которые получаются после использования обобщенных формул Сохоцкого (1.1) для интеграла с $\tau - z$ и дифференцирования под знаком интеграла для интеграла с $\tau + z$. Вычитая и складывая формулы (2.2) и (2.3), получим

$$\varphi^{(2k)}(t) = \Psi_+^{(2k)}(t) - \Psi_*^{(2k)}(t), \tag{2.4}$$

$$\frac{(2k)!}{\pi i} \left(\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{2k+1}} + \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau+t)^{2k+1}} \right) = \Psi_+^{(2k)}(t) + \Psi_*^{(2k)}(t), \quad k=\overline{0,n},$$

что позволяет придать уравнению (2.1) вид краевой задачи для аналитических функций

$$\sum_{k=0}^{n}\left[(a(t)a_k+b(t)b_k)\left(\Psi_+^{(2k)}(t)-\Psi_*^{(2k)}(t)\right)+(a(t)a_k-b(t)b_k)\left(\Psi_+^{(2k)}(t)+\Psi_*^{(2k)}(t)\right)\right] \;=\; h(t),$$

$t\in L$, или после очевидных упрощений

$$2a(t)\sum_{k=0}^{n}a_k\Psi_+^{(2k)}(t)-2b(t)\sum_{k=0}^{n}b_k\Psi_*^{(2k)}(t)=h(t),\quad t\in L. \tag{2.5}$$

Первая сумма в левой части равенства (2.5) является предельным значением на кривой L функции $Y_+(z)=\sum_{k=0}^{n}a_k\Psi_+^{(2k)}(z)$, аналитической в D_+. С учетом того, что производная четного порядка от четной аналитической функции сама является четной аналитической функцией, вторая сумма будет предельным значением четной функции $Y_*(z)=\sum\limits_{k=0}^{n}b_k\Psi_*^{(2k)}(z)$, аналитической в D_*. Краевую задачу (2.5) теперь можно записать в виде

$$Y_+(t)=\frac{b(t)}{a(t)}Y_*(t)+\frac{h(t)}{2a(t)},\quad t\in L. \tag{2.6}$$

Такая задача относится к типу смешанных краевых задач Римана–Карлемана. Решать ее следует с условием $Y_*(\infty)=0$, вытекающим из условия $\Psi_*(\infty)=0$. Укажем работу [6], где возникла и была решена близкая краевая задача: роль кривой L там играла прямая, параллельная действительной оси, а условие четности одной из искомых функций заменялось на некоторое аналогичное условие. Мы решаем задачу (2.6), следуя классической схеме Ф. Д. Гахова [7] решения задачи Римана и используя при этом подходящую факторизацию коэффициента $b(t)/a(t)$ задачи. В результате получится

$$Y_+(z)=X_+(z)\left(T_+(z)+P(z)\right);\quad Y_*(z)=X_*(z)\left(T_*(z)+P(z)\right),$$

где

$$X_+(z)=\exp\Gamma_+(z),\quad X_*(z)=\left(z^2-z_0^2\right)^{-\alpha}\exp\Gamma_*(z),\quad z_0\in D_+,\quad \alpha=\operatorname{Ind}_L\frac{b(t)}{a(t)},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\ln\left[(\tau^2-z_0^2)^{-\alpha}b(\tau)/a(\tau)\right]d\tau}{\tau-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\ln\left[(\tau^2-z_0^2)^{-\alpha}b(\tau)/a(\tau)\right]d\tau}{\tau+z}=\begin{cases}\Gamma_+(z), & z\in D_+,\\ \Gamma_*(z), & z\in D_*,\end{cases}$$

$$\frac{1}{4\pi i}\int_L\frac{h(\tau)d\tau}{a(\tau)X_+(\tau)(\tau-z)}+\frac{1}{4\pi i}\int_L\frac{h(\tau)d\tau}{a(\tau)X_+(\tau)(\tau+z)}=\begin{cases}T_+(z), & z\in D_+,\\ T_*(z), & z\in D_*,\end{cases}$$

$$P(z)=\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{\alpha-1}c_kz^{2k}, & c_k\in\mathbb{C},\quad \text{если}\quad \alpha>0,\\ 0, & \text{если}\quad \alpha\leqslant 0.\end{cases}$$

При $\alpha\geqslant 0$ задача (2.6) разрешима безусловно, а при $\alpha<0$ для ее разрешимости необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int_L\frac{h(\tau)\tau^{2k-1}d\tau}{a(\tau)X_+(\tau)}=0,\quad k=\overline{1,-\alpha}. \tag{2.7}$$

Предположим, что задача (2.6) разрешима, а ее решение найдено. Далее следует решать дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^{n}a_k\Psi_+^{(2k)}(z)=Y_+(z),\quad z\in D_+, \tag{2.8}$$

$$\sum_{k=0}^{n}b_k\Psi_*^{(2k)}(z)=Y_*(z),\quad z\in D_*,\quad \Psi_*(\infty)=0, \tag{2.9}$$

и в случае нахождения их решений воспользоваться формулой (2.4) при $k=0$:

$$\varphi(t)=\Psi_+(t)-\Psi_*(t),\quad t\in L. \tag{2.10}$$

3. Решение дифференциальных уравнений

Применяя к уравнению (2.8) метод вариации произвольных постоянных (напр., [8, с. 94]), получим его общее решение

$$\Psi_+(z)=\sum_{j=1}^{2n} f_j(z)\left(C_j^+ + \int_{z_1}^{z}\frac{W_j(\zeta)d\zeta}{W(\zeta)}\right). \tag{3.1}$$

В формуле (3.1) функции $f_j(z)$, явный вид которых известен и здесь не приводится, образуют фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения, $C_j^+\in\mathbb{C}$, $z_1\in D_+$, $W(\zeta)$ – вронскиан функций $f_j(\zeta)$, $W_j(\zeta)$ – определители, полученные из $W(\zeta)$ заменой элементов j-го столбца на $0,0,\ldots,0,Y_+(\zeta)/a_n$, $j=\overline{1,2n}$. Отметим, что в частности, когда корни $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{2n}$ соответствующего характеристического уравнения являются однократными, формулу (3.1) можно упростить [3]:

$$\Psi_+(z)=\sum_{j=1}^{2n} e^{\lambda_j z}\left(C_j^+ - \frac{\int\limits_{z_1}^{z} e^{-\lambda_j\zeta}Y_+(\zeta)d\zeta}{a_n\prod\limits_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{2n}(\lambda_m-\lambda_j)}\right). \tag{3.2}$$

Интегрирование в формуле (3.1) производится по любой кривой в области D_+, соединяющей фиксированную точку z_1 с произвольной точкой z, и в силу конечности и односвязности области D_+ приводит к однозначной аналитической функции.

Уравнение (2.9) сложнее. Будем решать это уравнение также методом вариации произвольных постоянных. Так как такого отдельного метода для искомых четных функций не существует, то мы вначале найдем все решения и затем выберем из них четные. Очевидно, что корнями соответствующего характеристического уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} b_k\mu^{2k}=0 \tag{3.3}$$

будут пары $\pm\mu_m$ противоположных комплексных чисел некоторых кратностей k_m, $m=\overline{1,s}$, $\sum\limits_{m=1}^{s}k_m=n$. Знаки «$+$» и «$-$» в каждой паре выбираются произвольно. Фундаментальную систему решений однородного уравнения (2.9) возьмем в виде

$$z^l\operatorname{ch}(\mu_m z),\quad z^l\operatorname{sh}(\mu_m z),\quad l=\overline{0,k_m-1},\quad m=\overline{1,s}. \tag{3.4}$$

Если для некоторого m корнем характеристического уравнения будет число 0, то соответствующие функции в совокупности (3.4) следует заменить на z^l, $l=\overline{0,2k_m-1}$, где k_m – кратность каждого нуля в паре ±0. Так как функции (3.4) линейно независимы и имеют на бесконечности существенную особую точку, то никакая их линейная комбинация с ненулевым набором коэффициентов, в том числе дающая четную функцию, не приведет к аналитическому на бесконечности решению с условием $\Psi_*(\infty)=0$. Случай $\mu_m=0$ не изменит этой ситуации, поскольку будет добавлять в упомянутой линейной комбинации полюсы разных порядков. Следовательно, однородное уравнение (2.9) имеет лишь решение $\Psi_*(z)\equiv0$. Ненулевым решением уравнения (2.9) может быть только некоторое частное решение неоднородного уравнения. Это решение записывается по формуле

$$\Psi_*(z)=\sum_{j=1}^{2n} g_j(z)\left(C_j^* + \int_{0}^{z}\frac{U_j(\zeta)d\zeta}{U(\zeta)}\right), \tag{3.5}$$

аналогичной формуле (3.1). В формуле (3.5) $g_j(z)$ – это функции (3.4), как-либо занумерованные, C_j^* – подлежащие нахождению комплексные числа, $U(\zeta)$ – вронскиан функций $g_j(\zeta)$, $U_j(\zeta)$ – определители, полученные из $U(\zeta)$ заменой элементов j-го столбца на $0,0,...,0,Y_*(\zeta)/b_n$, $j=\overline{1,2n}$. Интегрирование в формуле (3.5) производится по любой кривой в области D_*, соединяющей точки 0 и z. Так как D_* является бесконечной двусвязной областью, то следует наложить условия, приводящие к однозначности функции $\Psi_*(z)$. Такими необходимыми и достаточными условиями будут, очевидно, условия выполнения равенств

$$\int_L \frac{U_j(t)dt}{U(t)} = 0, \quad j=\overline{1,2n}, \tag{3.6}$$

$$\int_{L^*} \frac{U_j(t)dt}{U(t)} = 0, \quad j=\overline{1,2n}. \tag{3.7}$$

Обоснуем, что для дальнейшего можно ограничиться условиями (3.6).

Лемма. *Условия* (3.7) *являются следствием условий* (3.6).

Доказательство. Для доказательства, а также и для последующих рассуждений, нумерацию функций (3.4) сделаем более определенной. Для четных значений l функции $z^l\operatorname{ch}(\mu_m z)$ будут четными, а функции $z^l\operatorname{sh}(\mu_m z)$ нечетными. Для нечетных значений l, наоборот, функции $z^l\operatorname{ch}(\mu_m z)$ будут нечетными, а функции $z^l\operatorname{sh}(\mu_m z)$ четными. При $\mu_m=0$ при четном l функции z^l будут четными, а при нечетном l нечетными. Всего в совокупности (3.4) n четных и n нечетных функций. Будем считать, что при нечетном j функции $g_j(z)$ являются четными, а при четном j нечетными.

Обозначим $U(z)=\det(a_{pq}(z))_{p,q=1}^{2n}$. Первая строка вронскиана $U(z)$ будет состоять из чередующихся четных и нечетных функций, начиная с четной функции $a_{11}(z)=g_1(z)$. Так как дифференцирование меняет характер четности функций, то вторая строка вронскиана $U(z)$ будет также состоять из чередующихся четных и нечетных функций, начиная с нечетной функции $a_{21}(z)=$ $=g_1'(z)$. Аналогично чередуются четные и нечетные функции в последующих строках. Расположение четных и нечетных функций во вронскиане $U(z)$ будет похоже на расположение черных и белых клеток на шахматной доске размером $2n\times 2n$. Очевидно, что сумма $p+q$ индексов для четной функции $a_{pq}(z)$ будет четным числом, а для нечетной функции $a_{pq}(z)$ – нечетным числом. Вронскиан $U(z)$ есть сумма слагаемых, имеющих с точностью до знака вид

$$a_{1,m_1}(z)\; a_{2,m_2}(z)\cdot\ldots\cdot a_{2n,m_{2n}}(z), \tag{3.8}$$

где $m_1,m_2,...,m_{2n}$ – перестановка чисел $1,2,...,2n$. Если в произведении (3.8) было бы нечетное число нечетных функций, то сумма всех индексов всех множителей также была бы нечетным числом. Но это невозможно, так как $1+m_1+2+m_2+...+2n+m_{2n}=2(1+2+...+2n)$ – четное число. Следовательно, в произведении (3.8) четное число нечетных функций (а также некоторое количество четных функций), поэтому произведение является четной функцией. Отсюда вытекает четность $U(z)$.

Определитель $U_j(z)$ лишь j-м столбцом отличается от определителя $U(z)$. Если j – четное число, то в j-м столбце в качестве последнего элемента $a_{2n,j}(z)$ будет четная функция $Y_*(z)/b_n$. Нули, которыми являются остальные элементы этого столбца, можно считать чередующимися четными и нечетными функциями, начиная с нечетной функции $a_{1j}(z)$. В результате расположение четных и нечетных функций в определителе $U_j(z)$ будет таким же, как и в $U(z)$, поэтому определитель $U_j(z)$ будет четной функцией.

Если j – нечетное число, то можно считать, что лишь в j-м столбце определителя $U_j(z)$ характер четности элементов иной, чем в $U(z)$. Тогда один из множителей в каждом из слагаемых, в сумму которых раскладывается определитель $U_j(z)$, изменит характер четности по сравнению с аналогичным множителем в $U(z)$. Вместе с тем изменится характер четности и самого определителя $U_j(z)$ по сравнению с $U(z)$ – определитель $U_j(z)$ будет нечетным.

Теперь понятно, что в интегралах из равенств (3.6) все подынтегральные функции являются четными или нечетными. Сделав в этих интегралах замену $t=-t_1$, придем (с точностью, возможно, до знака) к интегралам из равенств (3.7), поэтому из равенств (3.6) вытекают равенства (3.7). □

Предполагая в дальнейшем условия (3.6) выполненными, вернемся к формуле (3.5), придав ей вид

$$\Psi_*(z)=\sum_{j=1}^{n} g_{2j-1}(z)\left(C^*_{2j-1}+\int\limits_0^z \frac{U_{2j-1}(\zeta)d\zeta}{U(\zeta)}\right)+$$
$$+\sum_{j=1}^{n} g_{2j}(z)\left(C^*_{2j}+\int\limits_0^z \frac{U_{2j}(\zeta)d\zeta}{U(\zeta)}\right). \tag{3.9}$$

Поскольку $\frac{U_{2j-1}(\zeta)}{U(\zeta)}$ являются нечетными функциями, то первообразные $\int\limits_0^z \frac{U_{2j-1}(\zeta)d\zeta}{U(\zeta)}$ будут четными функциями, и тогда первая сумма в правой части формулы (3.9) даст четную функцию. Функции $\frac{U_{2j}(\zeta)}{U(\zeta)}$ являются четными, поэтому первообразные $\int\limits_0^z \frac{U_{2j}(\zeta)d\zeta}{U(\zeta)}$ являются нечетными функциями. Отсюда вытекает, что для четности второй суммы в (3.9) (а вместе с ней для четности функции $\Psi_*(z)$) следует в дальнейшем брать $C^*_{2j}=0,\ j=\overline{1,n}$.

Осталось добиться аналитичности функции $\Psi_*(z)$ на бесконечности вместе с условием $\Psi_*(\infty)=0$. Для этого разложим функцию $\Psi_*(z)$ на бесконечности в ряд Лорана и приравняем к нулю соответствующие коэффициенты. В результате придем к следующей бесконечной линейной алгебраической системе для нахождения постоянных $C^*_{2j-1},\ j=\overline{1,n}$:

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_{\gamma j}C^*_{2j-1}=\beta_\gamma,\quad \gamma=1,2,3,..., \tag{3.10}$$

где

$$\alpha_{\gamma j}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=\rho}\frac{g_{2j-1}(t)dt}{t^{2\gamma-1}},$$

$$\beta_\gamma=-\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{2n}\int\limits_{|t|=\rho}\frac{g_j(t)}{t^{2\gamma-1}}\int\limits_0^t\frac{U_j(\zeta)d\zeta}{U(\zeta)},$$

ρ – достаточно большое положительное число.

4. Формулировка результата. Пример

Проведенные рассуждения и формула (2.10) позволяют сформулировать результат.

Теорема. *Для разрешимости уравнения* (2.1) *необходимо и достаточно, чтобы были верны равенства* (2.7) *при* $\alpha<0$, *равенства* (3.6) *и была совместна система* (3.10). *Если эти условия выполняются, то искомая функция находится по формуле*

$$\varphi(t)=\sum_{j=1}^{2n} f_j(t)\left(C^+_j+\int\limits_{z_1}^t\frac{W_j(\zeta)d\zeta}{W(\zeta)}\right)-$$
$$-\sum_{j=1}^{n}\left(g_{2j-1}(t)\left(C^*_{2j-1}+\int\limits_0^t\frac{U_{2j-1}(\zeta d\zeta)}{U(\zeta)}\right)+g_{2j}(t)\int\limits_0^t\frac{U_{2j}(\zeta)d\zeta}{U(\zeta)}\right),$$

где C^+_j *– произвольные комплексные постоянные,* $j=\overline{1,2n}$, *а комплексные постоянные* C^*_{2j-1} *являются решением системы* (3.10), $j=\overline{1,n}$.

Рассмотрим пример:

$$(-1+4i)\varphi(t)+3\varphi''(t)+\frac{1+4i}{\pi i}\left(\int\limits_{|\tau-1|=0,5}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}+\int\limits_{|\tau-1|=0,5}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau+t}\right)+$$

$$+\frac{2}{\pi i}\left(\int\limits_{|\tau-1|=0,5}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^3}+\int\limits_{|\tau-1|=0,5}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau+t)^3}\right)=\frac{1+2t-t^2}{(t-1)^3},\quad |t-1|=0,5.$$

Так выглядит уравнение (2.1) при $n=1$, $a(t)=b(t)=1$, $a_0=4i$, $b_0=-1$, $a_1=2$, $b_1=1$, $h(t)=$ $=\frac{1+2t-t^2}{(t-1)^3}$. Окружность $|t-1|=0,5$ расположена по одну из сторон, например, мнимой оси. Краевая задача (2.6) принимает вид задачи о скачке

$$Y_+(t)-Y_*(t)=\frac{1+2t-t^2}{2(t-1)^3},\quad |t-1|=0,5,$$

которая безусловно разрешима и имеет единственное решение. Несложно найти представление

$$\frac{1+2t-t^2}{2(t-1)^3}=\frac{1-2t-t^2}{2(t+1)^3}-\frac{t^4-8t^2-1}{(t^2-1)^3},$$

так что, очевидно, будет получаться

$$Y_+(z)=\frac{1-2z-z^2}{2(z+1)^3},\quad Y_*(z)=\frac{z^4-8z^2-1}{(z^2-1)^3}.$$

Уравнение (2.8) принимает вид

$$2\Psi''_+(z)+4i\Psi_+(z)=\frac{1-2z-z^2}{2(z+1)^3},\quad |z-1|<0,5.$$

Взяв функции $e^{(1-i)z}$, $e^{(-1+i)z}$ в качестве фундаментальной системы решений соответствующего однородного уравнения, по формуле (3.2) запишем общее решение

$$\Psi_+(z)=e^{(1-i)z}\left(C_1^+ +\frac{1+i}{16}\int\limits_1^z\frac{e^{(-1+i)\zeta}(1-2\zeta-\zeta^2)}{(\zeta+1)^3}d\zeta\right)+$$

$$+e^{(-1+i)z}\left(C_2^+ -\frac{1+i}{16}\int\limits_1^z\frac{e^{(1-i)\zeta}(1-2\zeta-\zeta^2)}{(\zeta+1)^3}d\zeta\right).$$

Уравнение (2.9) в примере принимает вид

$$\Psi''_*(z)-\Psi_*(z)=\frac{z^4-8z^2-1}{(z^2-1)^3},\quad z\in\{z:\ |z-1|>0,5\}\bigcap\{z:\ |z+1|>0,5\}.$$

Взяв функции $\operatorname{ch}z$, $\operatorname{sh}z$ в качестве фундаментальной системы решений однородного уравнения, получим по формуле (3.9)

$$\Psi_*(z)=\operatorname{ch}z\left(C_1^*-\int\limits_0^z\frac{\zeta^4-8\zeta^2-1}{(\zeta^2-1)^3}\operatorname{sh}\zeta d\zeta\right)+\operatorname{sh}z\left(C_2^*+\int\limits_0^z\frac{\zeta^4-8\zeta^2-1}{(\zeta^2-1)^3}\operatorname{ch}\zeta d\zeta\right),$$

где в дальнейшем следует взять $C_2^*=0$. Последние два интеграла удается вычислить:

$$\int\limits_0^z\frac{\zeta^4-8\zeta^2-1}{(\zeta^2-1)^3}\operatorname{sh}\zeta d\zeta=\frac{1}{z^2-1}\operatorname{ch}z+\frac{2z}{(z^2-1)^2}\operatorname{sh}z+1,$$

$$\int\limits_0^z\frac{\zeta^4-8\zeta^2-1}{(\zeta^2-1)^3}\operatorname{ch}\zeta d\zeta=\frac{1}{z^2-1}\operatorname{sh}z+\frac{2z}{(z^2-1)^2}\operatorname{ch}z.$$

В результате получится

$$\Psi_*(z)=(C_1^*-1)\operatorname{ch}z+\frac{1}{1-z^2}.$$

Очевидно, что лишь при $C_1^* = 1$ функция $\Psi_*(z) = \frac{1}{1-z^2}$ будет аналитической на бесконечности с условием $\Psi_*(z) = 0$. Благодаря простому выражению для функции $\Psi_*(z)$ записывать и анализировать систему (3.10) в примере не требуется. Окончательная формула решения примера имеет вид

$$\varphi(t) = e^{(1-i)t}\left(C_1^+ + \frac{1+i}{16}\int\limits_1^t \frac{e^{(-1+i)\zeta}(1-2\zeta-\zeta^2)}{(\zeta+1)^3}d\zeta\right)+$$

$$+e^{(-1+i)t}\left(C_2^+ - \frac{1+i}{16}\int\limits_1^t \frac{e^{(1-i)\zeta}(1-2\zeta-\zeta^2)}{(\zeta+1)^3}d\zeta\right) - \frac{1}{1-t^2}.$$

5. Заключение

Подсчитаем еще число произвольных комплексных постоянных, входящих в решение исходного уравнения (2.1) в случае его разрешимости. Краевая задача (2.6) даст $\max(0,\alpha)$ постоянных c_k. Решение уравнения (2.8) добавит $2n$ постоянных C_j^+. При $\alpha > 0$ условия (3.6) в развернутом виде будут представлять собой систему линейных алгебраических уравнений для нахождения постоянных c_k, входящих в решение задачи (2.6). Вид этой системы может быть легко записан и здесь не приводится. После решения системы число произвольных постоянных уменьшится на ранг r ее матрицы. Будем считать $r = 0$ при $\alpha \leqslant 0$. Укажем матрицу системы (3.10) в случае однократных корней уравнения (3.3). При этом $g_{2j-1}(z) = \operatorname{ch}(\mu_j z),\ \ j = \overline{1,n}$, так что матрица примет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{\mu_1^2}{2!} & \frac{\mu_2^2}{2!} & \dots & \frac{\mu_n^2}{2!} \\ \frac{\mu_1^4}{4!} & \frac{\mu_2^4}{4!} & \dots & \frac{\mu_n^4}{4!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\mu_1^{2k}}{(2k)!} & \frac{\mu_2^{2k}}{(2k)!} & \dots & \frac{\mu_n^{2k}}{(2k)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

т. е. будет бесконечной матрицей типа матрицы Вандермонда для попарно различных чисел $\mu_1^2, \mu_2^2, \dots, \mu_n^2$. Ранг такой матрицы равен n, поэтому однородная система (3.10) имеет лишь нулевое решение. Следовательно, при решении системы не появится новых произвольных постоянных. Произвольные постоянные в правых частях системы могут использоваться для достижения ее совместности, из-за чего их количество уменьшится на некоторое число r_1. Всего при однократных корнях уравнения (3.3) будет, таким образом, $\max(0,\alpha) + 2n - r - r_1$ произвольных постоянных. Указать ранг матрицы системы (3.10) при корнях уравнения (3.3) любой кратности представляется автору несколько затруднительным. По-видимому, он снова будет равен n, поэтому число произвольных постоянных в решении исходного уравнения останется тем же.

Отметим, что H-непрерывность функций $\Psi_+(t)$ и $\Psi_*(t)$ вместе с их производными до порядка $2n$ (а тогда согласно формуле (2.10) и искомой функции $\varphi(t)$) обосновывается несложно и вполне аналогично [4].

Литература

1. *Зверович Э. И.* Обобщение формул Сохоцкого // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фiз.-мат. навук. 2012. № 2. С. 24–28.

2. *Зверович Э. И.* Решение гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. 2010. Т. 54, № 6. С. 5–8.

3. *Шилин А. П.* Гиперсингулярные интегро-дифференциальные уравнения со степенными множителями в коэффициентах // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2019. № 3. С. 48–56. https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-3-48-56

4. *Шилин А. П.* Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение с линейными функциями в коэффициентах // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фiз.-мат. навук. 2022. Т. 58,

№ 4. С. 358–369. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-4-358-369

5. *Шилин А. П.* Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение с квадратичными функциями в коэффициентах // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2024. Т. 60, № 2. С. 117–131. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-2-117-131

6. *Черский Ю. И.* Интегральное уравнение типа свертки с экспонентой в ядре // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 11. С. 1566–1567.

7. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.

8. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, 6-е изд. СПб.: Лань, 2003.

References

1. Zverovich E. I. Generalization of Sokhotsky formulas. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*, 2012, no. 2, pp. 24–28 (in Russian).

2. Zverovich E. I. Solution of the hypersingular integro-differential equation with constant coefficients. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2010, vol. 54, no. 6, pp. 5–8 (in Russian).

3. Shilin A. P. Hypersingular integro-differential equations with power factors in coefficients. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2019, no. 3, pp. 48–56 (in Russian). https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-3-48-56

4. Shilin A. P. A hypersingular integro-differential equation with linear functions in coefficients. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*, 2022, vol. 58, no. 4, pp. 358–369 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-4-358-369

5. Shilin A. P. Hypersingular integro-differential equation with quadratic functions in coefficients. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*, 2024, vol. 60, no. 2, pp. 117–131 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-2-117-131

6. Chersky Yu. I. An integral equation of convolution type with an exponent in the kernel. *Differential Equations*, 1997, vol. 33, no. 11, pp. 1566–1567 (in Russian).

7. Gakhov F. D. *Boundary value problems*. Moscow, Nauka, 1977 (in Russian).

8. Kamke E. *Handbook of ordinary differential equations*. 6th ed. Saint Peterburg, Lan’, 2003 (in Russian).