УДК 517.954

Задача Пикара на плоскости для квазилинейного гиперболического уравнения второго порядка

В. И. Корзюк, О. А. Ковнацкая

Белорусский государственный университет,
Институт математики НАН Беларуси
e-mail: Korzyuk@bsu.by, Kovnatskaya@bsu.by
Поступила 12.09.2023

В данной работе получены классические решения задач для квазилинейного гиперболического уравнения второго порядка в случае двух независимых переменных с заданными для искомой функции условиями в сочетании как на характеристических линиях, так и на нехарактеристических линиях. Задачи сводятся к системе уравнений с вполне непрерывным оператором. Решения строятся методом последовательных приближений. Проводятся обоснования. Кроме того, показывается для каждой рассмотренной задачи и единственность полученного классического решения. Доказаны необходимые и достаточные условия согласования заданных функций в случае каждой из рассмотренных в статье задач, при выполнении которых классические решения их существуют при наличии определенной гладкости заданных функций.

Введение. В книге [1, п. 4.6] дается постановка задач для гиперболического уравнения двух независимых переменных, главная часть которого представлена во втором каноническом виде. Среди них задачи Гурса и Пикара. В связи с этим можно смотреть и книгу [2]. В [3–5] авторами данной статьи рассмотрены аналогичные задачи для одномерного волнового уравнения, когда условия для искомых функций заданы только на характеристиках или при наличии условия на одной из характеристик и на одной из нехарактеристических линий плоскости. В [3, 4] использовано представление общего решения для волнового уравнения. В данной статье, как и в [5], классические решения строятся методом последовательных приближений. Здесь следует отметить и работу [6], в которой изучается классическое решение первой смешанной задачи в криволинейной полуполосе для уравнения типа волнового уравнения с переменными коэффициентами и неоднородным дифференциальным оператором.

Такого рода задачи, близкие к нашей статье, рассмотрены в [7–10]. Однако в представленной здесь работе в каждом случае решение рассматриваемых задач представлено в аналитическом виде в виде последовательных приближений непрерывно дифференцируемых функций. Особый интерес представляет случай, когда исходное уравнение задано на всей плоскости. Здесь присоединяются условия Дирихле, одно из которых задано на выбранной характеристике уравнения и на некоторой нехарактеристической линии, на которую налагаются определенные условия.

1. Постановка задачи П-1. На плоскости $\mathbb{R}^2$ независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$\mathcal{L}u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{D}) = a(\boldsymbol{x})\partial_{x_1}^2 u(\boldsymbol{x}) + 2b(\boldsymbol{x})\partial_{x_1}\partial_{x_2}u(\boldsymbol{x}) + c(\boldsymbol{x})\partial_{x_2}^2 u(\boldsymbol{x}) + \mathcal{L}^{(1)}(\boldsymbol{x},u(\boldsymbol{x})) = f(\boldsymbol{x}) \qquad (1)$$

относительно искомой функции $u:\mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$, где a, b, c, f – заданные функции на всей плоскости, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$. Оператор $\mathcal{L}^{(1)}$ рассматриваем как функцию $\mathcal{L}^{(1)}(\boldsymbol{x},\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ от переменных $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, которая удовлетворяет следующему условию Липшица.

Условие 1. *Для любого* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ *существует константа* $L \in \mathbb{R}$, *для которой для любых* $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ *и* $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ *из* $\mathbb{R}^3$ *выполняется неравенство*

$$|\mathcal{L}^{(1)}(\boldsymbol{x},\xi)-\mathcal{L}^{(1)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta})|\leqslant L\,|\xi-\boldsymbol{\eta}|, \tag{2}$$

где $|\xi-\boldsymbol{\eta}|=\left(\sum_{j=1}^{3}(\xi_j-\eta_j)^2\right)^{1/2}$.

Условие 2. *На всей плоскости* $\mathbb{R}^2$ *уравнение* (1) *является гиперболическим* [1], *т. е. дискриминант, составленный из коэффициентов главной части его является положительным, т. е.*

$$b^2(\boldsymbol{x})-a(\boldsymbol{x})c(\boldsymbol{x})\geqslant A>0 \tag{3}$$

для любого $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$ *и некоторой константы* A *из множества действительных чисел* $\mathbb{R}$.

Будем считать, что коэффициент $a(\boldsymbol{x})\neq 0$ или $c(\boldsymbol{x})\neq 0$ (если $a(\boldsymbol{x})=c(\boldsymbol{x})=0$, то мы уже имеем второй канонический вид уравнения (1)). Из условия 2 следует, что уравнение (1) имеет два семейства характеристик $\varphi^{(1)}(\boldsymbol{x})=C_1$ и $\varphi^{(2)}(\boldsymbol{x})=C_2$, которые являются решениями соответствующего уравнения характеристик

$$a(\boldsymbol{x})(\mathrm{d}x_2)^2-2b(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2+c(\boldsymbol{x})(\mathrm{d}x_1)^2=0. \tag{4}$$

К уравнению (1) присоединим условия

$$u(\boldsymbol{x})|_{\gamma^{(1)}}=\psi^{(1)}(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\gamma^{(1)}, \tag{5}$$

$$u(\boldsymbol{x})|_{\gamma^{(2)}}=\psi^{(2)}(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\gamma^{(2)}, \tag{6}$$

которые задаются на характеристике $\gamma^{(1)}=\{\boldsymbol{x}\,|\,\varphi^{(2)}(\boldsymbol{x})=C_2^{(0)}\}$ и некоторой линии $\gamma^{(2)}=\{\boldsymbol{x}\,|\,x_2=\mu(x_1)\}$, $\mu\in C^2(\mathbb{R})$, которая выбирается таким образом, чтобы она пересекалась с $\gamma^{(1)}$ только в одной точке $M^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)})\in\mathbb{R}^2$, $x_1\in\mathbb{R}$, рис. 1. Здесь $a(\boldsymbol{x})\neq 0$, $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$. Если $c(\boldsymbol{x})\neq 0$, $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$, то линию $\gamma^{(2)}$ можно представить в виде $\gamma^{(2)}=\{\boldsymbol{x}\,|\,x_1=\tilde{\mu}(x_2)\}$, $\tilde{\mu}\in C^2(\mathbb{R})$. Если для некоторых $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$ $a(\boldsymbol{x})=0$, а для других $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$ $c(\boldsymbol{x})=0$, но $a^2(\boldsymbol{x})+c^2(\boldsymbol{x})\neq 0$, то в этом случае рассматриваем в совокупности предыдущие случаи.

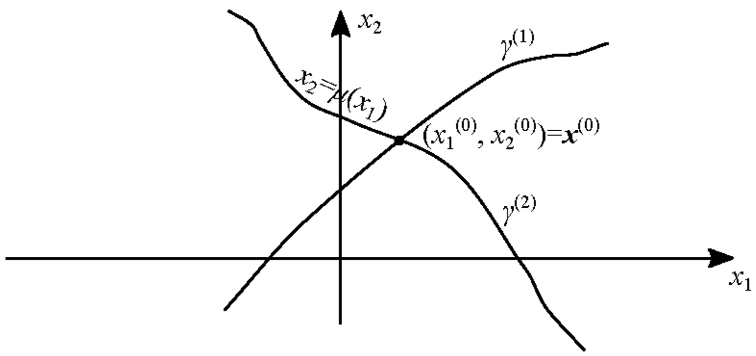

Рис. 1

Определение 1. *Функцию* u *из класса* $C^2(\mathbb{R}^2)$ *назовем классическим решением задачи* (1), (5), (6), *если она удовлетворяет уравнению* (1) *и условиям* (5), (6).

2. Интегральное уравнение для задачи П-1. Пусть $a(\boldsymbol{x})\neq 0$ для любых независимых переменных $\boldsymbol{x}$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ и заданные функции уравнения (1) достаточно гладкие, например, a, b, c, $\mathcal{L}^{(1)}$ являются функциями из класса $C^2(\mathbb{R}^2)$. Согласно условию 2 уравнение (4) имеет два семейства характеристик [1]

$$\varphi^{(j)}(\boldsymbol{x})=C_j,\quad j=1,2.$$

Через полученные функции $\varphi^{(j)}$ делаем замену независимых переменных $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)$

$$y_1=\varphi^{(1)}(\boldsymbol{x}),\quad y_2=\varphi^{(2)}(\boldsymbol{x}). \tag{7}$$

Замена (7) является невырожденной [1] и $y_j \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Следовательно, из (7) имеем обратную замену, т. е.

$$x_j = \tilde{\varphi}^{(j)}(\boldsymbol{y}), \quad j = 1, 2.$$

С помощью замены (7) относительно функции $v(\boldsymbol{y}) = u(\boldsymbol{x})$ уравнение приведется ко второму каноническому виду

$$\partial_{y_1}\partial_{y_2} v + \mathcal{L}^{(2)}(\boldsymbol{y}, v) = g(\boldsymbol{y}). \tag{8}$$

Условия (5), (6) преобразуются следующим образом:

$$v(y_1, y_2 = C^{(0)}) = \xi^{(1)}(y_1), \quad y_1 \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

$$v(y_1 = \nu(y_2), y_2) = \xi^{(2)}(y_2), \quad y_2 \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

где $y_1 = \nu(y_2)$ – линия, в которую переходит $\gamma^{(2)}$ при замене (7) в системе координат y_1 и y_2. На линию $\gamma^{(2)}$, а следовательно, и на функцию ν, налагаем ограничения в виде условия.

Условие 3. *Линия* $\gamma^{(2)}$ *такова, что функция* ν *из класса* $C^2(\mathbb{R})$ *имеет обратную функцию* $y_2 = \nu^{-1}(y_1)$ *и производная* $\mathrm{d}\nu^{-1} \neq 0$ *для любого значения* $y_1 \in \mathbb{R}$, *рис.* 2.

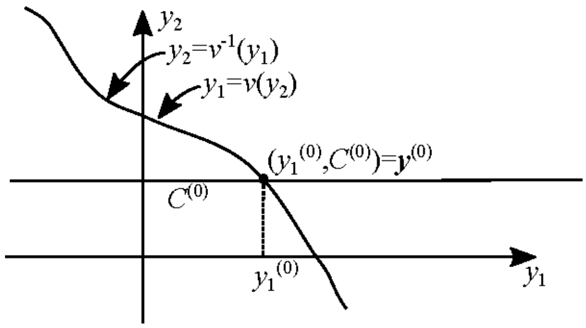

Рис. 2

Так как замена (7) является невырожденной, т. е. якобиан не равен нулю для всех $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$, то оператор $\mathcal{L}^{(2)}$ удовлетворяет условию 1, возможно с другой константой L.

Теорема 1. *Пусть функции* a, b, c, $\mathcal{L}^{(1)}$, f *из класса* $C^1(\mathbb{R}^2)$, $\psi^{(j)}$, $j = 1, 2$, – *из класса* $C^2(\mathbb{R})$. *Если* u *является классическим решением задачи* (1), (5), (6), *то* $v(\boldsymbol{y}) = u(\boldsymbol{x})$ *является классическим решением задачи* (8)–(10). *И наоборот, классическое решение задачи* (8)–(10) *является классическим решением* $u(\boldsymbol{x}) = v(\boldsymbol{y})$ *задачи* (1), (5), (6).

Доказательство следует из того, что замена (7) является невырожденной, и того, что заданные функции рассматриваемой задачи (1), (5), (6) достаточно гладкие (последнее будет доказано позже при конструкции классического решения задачи (8)–(10)).

Так как u – классическое решение задачи (1), (5), (6), то

$$\psi^{(1)}(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \psi^{(2)}(\boldsymbol{x}^{(0)}). \tag{11}$$

Будет доказано, что условие (11) является и достаточным для того, чтобы решение $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Следовательно, и для решения задачи (8)–(10) имеем условие согласования

$$\xi^{(1)}(y_1^{(0)}) = \xi^{(2)}(C^{(0)}). \tag{12}$$

Условия согласования (11) (условие (12)) является не только необходимым, но и достаточным условием существования классического решения задачи (1), (5), (6) (задачи (8)–(10)). Достаточность этих условий будет доказана при исследовании классического решения задачи (8)–(10).

Таким образом, рассматриваем классическое решение задачи (8)–(10) (см. также [1, п. 4.7]).

Вводим дополнительные обозначения и функции следующим образом:

$$\partial_{y_1} v(\boldsymbol{y}) = w^{(1)}(\boldsymbol{y}), \quad \partial_{y_2} v(\boldsymbol{y}) = w^{(2)}(\boldsymbol{y}).$$

Теперь уравнение (8) в новых обозначениях запишется в виде

$$\partial_{y_2} w^{(1)} + \mathcal{L}^{(2)}(\boldsymbol{y}, v, w^{(1)}, w^{(2)}) = g(\boldsymbol{y}), \tag{13}$$

или

$$\partial_{y_1} w^{(2)} + \mathcal{L}^{(2)}(\boldsymbol{y}, v, w^{(1)}, w^{(2)}) = g(\boldsymbol{y}). \tag{14}$$

Запишем уравнения (13), (14) в интегральном виде через функции $w^{(1)}$ и $w^{(2)}$, используя условия (9), (10). В результате получим систему интегральных уравнений второго рода

$$w^{(1)}(\boldsymbol{y}) = \mathrm{d}\xi^{(2)}(y_1) + \int\limits_{C^{(0)}}^{y_2} (g(y_1, z) - \mathcal{L}^{(2)}(y_1, z, v(y_1, z), w^{(1)}(y_1, z), w^{(2)}(y_1, z)))\mathrm{d}z,$$

$$w^{(2)}(\boldsymbol{y}) = \mathrm{d}\xi^{(1)}(y_2) + \int\limits_{\nu^{-1}(y_1)}^{y_1} (g(z, y_2) - \mathcal{L}^{(2)}(z, y_2, v(z, y_2), w^{(1)}(z, y_2), w^{(2)}(z, y_2)))\mathrm{d}z, \tag{15}$$

$$v(\boldsymbol{y}) = \xi^{(2)}(y_2) + \int\limits_{C^{(0)}}^{y_2} w^{(2)}(y_1, z)\mathrm{d}z.$$

Наряду с системой (15), рассмотрим и эквивалентную ей систему, состоящую из первых двух уравнений системы (15) и уравнения

$$v(\boldsymbol{y}) = \xi^{(1)}(y_1) + \int\limits_{\nu^{-1}(y_1)}^{y_1} w^{(1)}(z, y_2)\mathrm{d}z,$$

которая потребуется нам в дальнейшем при доказательстве теоремы 3 для установления гладкости вторых производных функции v.

Теорема 2. *Пусть* $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $w^{(1)}, w^{(2)}, a, b, c, f, \mathcal{L}^{(1)} \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $\psi^{(j)} \in C^2(\mathbb{R})$, $j = 1, 2$. *Тогда задача* (8)–(10) *и система уравнений* (15) *эквивалентны.*

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству соответствующего утверждения из книги [1].

Теорема 3. *Если* $a, b, c, \mathcal{L}^{(1)}, f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $\psi^{(j)} \in C^2(\mathbb{R})$, $j = 1, 2$, *то единственное решение* $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $w^{(1)}, w^{(2)} \in C^1(\mathbb{R}^2)$ *системы уравнений* (15) *существует, а функция* v *является решением задачи* (8)–(10)*, тогда и только тогда, когда выполняется условие согласования* (12).

Доказательство. Применим метод последовательных приближений. За нулевое приближение системы (15) возьмем $w_0^{(1)} = \mathrm{d}\xi^{(2)}$, $w_0^{(2)} = \mathrm{d}\xi^{(1)}$, $v_0 = \xi^{(2)}$. Следующие приближения вычисляются по формуле

$$w_k^{(1)}(\boldsymbol{y}) = \mathrm{d}\xi^{(2)}(y_1) + \int\limits_{y_2^{(0)}}^{y_2} (g(y_1, z) - \mathcal{L}^{(2)}(y_1, z, v_{k-1}(y_1, z), w_{k-1}^{(1)}(y_1, z), w_{k-1}^{(2)}(y_1, z)))\mathrm{d}z,$$

$$w_k^{(2)}(\boldsymbol{y}) = \mathrm{d}\xi^{(1)}(y_2) + \int\limits_{y_1^{(0)}}^{y_1} (g(z, y_2) - \mathcal{L}^{(2)}(z, y_2, v_{k-1}(z, y_2), w_{k-1}^{(1)}(z, y_2), w_{k-1}^{(2)}(z, y_2)))\mathrm{d}z, \tag{16}$$

$$v_k(\boldsymbol{y}) = \xi^{(2)}(y_2) + \int\limits_{y_2^{(0)}}^{y_2} w_{k-1}^{(2)}(y_1, z)\mathrm{d}z, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Пусть $\Omega^{(\lambda)} \subset \mathbb{R}^2$, $\lambda = 1, 2, \ldots,$ – подобласти в $\mathbb{R}^2$ такие, что $\bigcup\limits_{\lambda=1}^{\infty} \Omega^{(\lambda)} = \mathbb{R}^2$, $\Omega^{(\lambda)} \subset \Omega^{(\tilde{\lambda})}$, $\lambda < \tilde{\lambda}$, $\overline{\Omega^{(\lambda)}}$ – компактное множество в $\mathbb{R}^2$. Докажем равномерную сходимость последовательностей $\{w_k^{(1)}, w_k^{(2)}, v_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $\overline{\Omega^{(\lambda)}}$.

Путем вычитания предыдущего приближения из последующего получим соотношения

$$w_{k+1}^{(1)}-w_k^{(1)}=-\int\limits_{y_2^{(0)}}^{y_2}(\mathcal{L}^{(2)}(y_1,z,v_k(y_1,z),w_k^{(1)}(y_1,z),w_k^{(2)}(y_1,z))-$$
$$-\mathcal{L}^{(2)}(y_1,z,v_{k-1}(y_1,z),w_{k-1}^{(1)}(y_1,z),w_{k-1}^{(2)}(y_1,z)))\mathrm{d}z,$$
$$w_{k+1}^{(2)}-w_k^{(2)}=-\int\limits_{y_1^{(0)}}^{y_1}(\mathcal{L}^{(2)}(z,y_2,v_k(z,y_2),w_k^{(1)}(z,y_2),w_k^{(2)}(z,y_2))- \tag{17}$$
$$-\mathcal{L}^{(2)}(z,y_2,v_{k-1}(z,y_2),w_{k-1}^{(1)}(z,y_2),w_{k-1}^{(2)}(z,y_2)))\mathrm{d}z,$$
$$v_{k+1}-v_k=\int\limits_{y_2^{(0)}}^{y_2}(w_k^{(2)}-w_{k-1}^{(2)})(y_1,z)\mathrm{d}z,\quad k=1,2,\ldots.$$

Покажем, что разности $|w_{k+1}^{(1)}-w_k^{(1)}|$, $|w_{k+1}^{(2)}-w_k^{(2)}|$, $|v_{k+1}-v_k|$ удовлетворяют неравенствам

$$|w_{k+1}^{(1)}-w_k^{(1)}|,\ |w_{k+1}^{(2)}-w_k^{(2)}|,\ |v_{k+1}-v_k|\leqslant L^k B\frac{(y_1+y_2-y_1^{(0)}-y_2^{(0)})^k}{k!},\quad k=1,2,\ldots, \tag{18}$$

где B – некоторая постоянная. При $k=0$ неравенство (18) легко проверяется, так как

$$w_1^{(1)}-w_0^{(1)}=-\int\limits_{y_2^{(0)}}^{y_2}\mathcal{L}^{(2)}(y_1,z,\xi^{(2)}(y_1,z),\mathrm{d}\xi^{(2)}(y_1,z),\mathrm{d}\xi^{(1)}(y_1,z))\mathrm{d}z,$$
$$w_1^{(2)}-w_0^{(2)}=-\int\limits_{y_1^{(0)}}^{y_1}\mathcal{L}^{(2)}(z,y_2,\xi^{(2)}(z,y_2),\mathrm{d}\xi^{(2)}(z,y_2),\mathrm{d}\xi^{(1)}(z,y_2))\mathrm{d}z, \tag{19}$$
$$v_1-v_0=\int\limits_{y_2^{(0)}}^{y_2}\mathrm{d}\xi^{(1)}(z)\mathrm{d}z.$$

Оценка (18) сразу видна, если выбрать в (19) число B достаточно большим, которое зависит от функций $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$, $\mathcal{L}^{(2)}$ и размера области $\Omega^{(\lambda)}$. Из (17) для $k=1,2,\ldots$ имеем

$$|w_{k+1}^{(1)}-w_k^{(1)}|\leqslant\int\limits_{y_2^{(0)}}^{y_2}L^{k-1}B\frac{(y_1+z-y_1^{(0)}-y_2^{(0)})^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{d}z\leqslant$$
$$\leqslant L^kB\frac{(y_1+z-y_1^{(0)}-y_2^{(0)})^k}{k!}\bigg|_{y_2^{(0)}}^{y_2}\leqslant L^kB\frac{(y_1+y_2-y_1^{(0)}-y_2^{(0)})^k}{k!}.$$

Аналогично оцениваются разности $|w_{k+1}^{(2)}-w_k^{(2)}|$ и $|v_{k+1}-v_k|$. Заметим, что

$$w_k^{(1)}=w_0^{(1)}+\sum_{j=1}^{k}(w_j^{(1)}-w_{j-1}^{(1)}),\quad w_k^{(2)}=w_0^{(2)}+\sum_{j=1}^{k}(w_j^{(2)}-w_{j-1}^{(2)}),\quad v_k=v_0+\sum_{j=1}^{k}(v_j-v_{j-1}).$$

Из оценок (17) следует абсолютная и равномерная сходимость рядов

$$w_0^{(1)}+\sum_{k=1}^{\infty}(w_k^{(1)}-w_{k-1}^{(1)}),\quad w_0^{(2)}+\sum_{k=1}^{\infty}(w_k^{(2)}-w_{k-1}^{(2)}),\quad v_0+\sum_{k=1}^{\infty}(v_k-v_{k-1})$$

на компактном множестве $\overline{\Omega^{(\lambda)}}$, члены которых по абсолютной величине меньше членов равномерно сходящегося ряда

$$B+B\sum_{k=0}^{\infty}L^k\frac{(y_1+y_2-y_1^{(0)}-y_2^{(0)})^k}{k!}=B(1+e^{L(y_1+y_2-y_1^{(0)}-y_2^{(0)})}).$$

Таким образом, последовательные приближения $\{w_k^{(1)},w_k^{(2)},v_k\}$ на $\overline{\Omega^{(\lambda)}}$ равномерно стремятся к непрерывным функциям $w^{(1)},w^{(2)},v:\mathbb{R}^2\supset\overline{\Omega^{(\lambda)}}\ni\boldsymbol{y}\to w^{(1)}(\boldsymbol{y}),w^{(2)}(\boldsymbol{y}),v(\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}$ соответственно. Переходя к пределу в (16) [11] при $k\to\infty$, получим, что $w_k^{(1)},w_k^{(2)},v_k$ являются решением системы (15).

Докажем единственность решения. Предположим, что существуют два решения системы (15) $w^{(1)}, w^{(2)}, v$ и $W^{(1)}, W^{(2)}, V$, $\widetilde{w}^{(1)} = W^{(1)} - w^{(1)}$, $\widetilde{w}^{(2)} = W^{(2)} - w^{(2)}$, $\tilde{v} = V - v$. Тогда

$$\widetilde{w}^{(1)} = -\int\limits_{y_2^{(0)}}^{y_2} (\mathcal{L}^{(2)}(y_1, z, V(y_1, z), W^{(1)}(y_1, z), W^{(2)}(y_1, z)) - \mathcal{L}^{(2)}(y_1, z, v(y_1, z), w^{(1)}(y_1, z), w^{(2)}(y_1, z)))\mathrm{d}z,$$

$$\widetilde{w}^{(2)} = -\int\limits_{y_1^{(0)}}^{y_1} (\mathcal{L}^{(2)}(z, y_2, V(z, y_2), W^{(1)}(z, y_2), W^{(2)}(z, y_2)) - \qquad (20)$$

$$-\mathcal{L}^{(2)}(z, y_2, v(z, y_2), w^{(1)}(z, y_2), w^{(2)}(z, y_2)))\mathrm{d}z,$$

$$\tilde{v} = \int\limits_{y_2^{(0)}}^{y_2} \widetilde{w}^{(2)}(y_1, z)\mathrm{d}z.$$

Функции $\widetilde{w}^{(1)}, \widetilde{w}^{(2)}, \tilde{v} \in C(\overline{\Omega^{(\lambda)}})$. Поэтому $|\widetilde{w}^{(1)}|$, $|\widetilde{w}^{(2)}|$, $|\tilde{v}| \leqslant D$, D – некоторая постоянная. Из (19) имеем

$$|\widetilde{w}^{(1)}(\boldsymbol{y})| \leqslant \int\limits_{y_2^{(0)}}^{y_2} LD\mathrm{d}z \leqslant LD(y_1 - y_1^{(0)}) \leqslant LD\frac{y_1 + y_2 - y_1^{(0)} - y_2^{(0)}}{1!}.$$

Такие же оценки справедливы и для $\widetilde{w}^{(2)}$ и $\tilde{v}$. Применяя метод математической индукции, получим

$$|\widetilde{w}^{(1)}|,\ |\widetilde{w}^{(2)}|,\ |\tilde{v}| \leqslant L^k D\frac{(y_1 + y_2 - y_1^{(0)} - y_2^{(0)})^k}{k!}$$

для любого натурального k и любого $\boldsymbol{y} \in \overline{\Omega^{(\lambda)}}$. Отсюда следует, что $\widetilde{w}^{(1)} \equiv \widetilde{w}^{(2)} \equiv \tilde{v} \equiv 0$ в $\overline{\Omega^{(\lambda)}}$, если перейти к пределу при $k \to \infty$.

Таким образом, мы доказали утверждение теоремы 3 для системы (15) в подобласти $\Omega^{(\lambda)}$. Поскольку система $\{\Omega^{(\lambda)}\}_{\lambda=1}^{\infty}$ является покрытием плоскости $\mathbb{R}^2$, то отсюда получаем доказываемое утверждение теоремы 3 для системы (15). Достаточность условий согласования (11) следует из интегрального представления системы (15). Из предыдущего доказательства следует, что функции v, $w^{(1)}$, $w^{(2)}$ из класса непрерывных функций на всей плоскости $\mathbb{R}^2$. Поскольку эти функции являются решениями систем (15) и эквивалентной ей и эти системы интегральных уравнений Вольтерры второго рода, то отсюда очевидно следует, что $w^{(j)} \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $j = 1, 2$, а $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Теорема 3 доказана.

3. Постановка задачи П-2. На плоскости $\mathbb{R}^2$ независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ рассмотрим область Q, которая находится между характеристикой $\gamma^{(1)}$ и линией $\gamma^{(2)}$, $x_1 > x_1^{(0)}$, как показано на рис. 3.

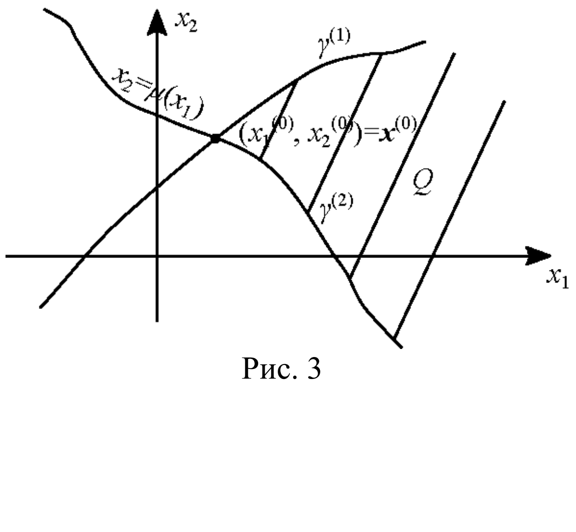

Рис. 3

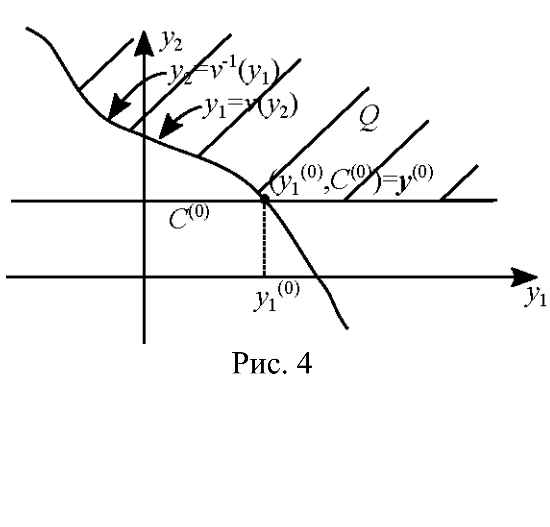

Рис. 4

Задача П-2 состоит в том, чтобы найти решение $u : Q \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ уравнения (1) в области Q, удовлетворяющее условиям

$$u(\boldsymbol{x})|_{\gamma^{(1)}} = \psi^{(1)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \gamma^{(1)}, \quad x_1 > x_1^{(0)}, \tag{21}$$

$$u(\boldsymbol{x})|_{\gamma^{(2)}} = \psi^{(2)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \gamma^{(2)}, \quad x_1 > x_1^{(0)}. \tag{22}$$

4. Интегральное уравнение для задачи П-2. После замены переменных (7) условия (21) и (22) преобразуются следующим образом (см. рис. 4):

$$v(y_1, y_2 = C^{(0)}) = \xi^{(1)}(y_1), \quad y_1 > y_1^{(0)}, \tag{23}$$

$$v(y_1 = \nu(y_2), y_2) = \xi^{(2)}(y_2), \quad y_2 > C^{(0)}. \tag{24}$$

Теорема 4. *Пусть функции* a, b, c, $\mathcal{L}^{(1)}$, f *из класса* $C^1(\mathbb{R}^2)$, $\psi^{(j)}$, $j = 1, 2$, *– из класса* $C^2(\mathbb{R})$. *Если* u *является классическим решением задачи* (1), (21), (22), *то* $v(\boldsymbol{y}) = u(\boldsymbol{x})$ *является классическим решением задачи* (8), (23), (24). *И наоборот, классическое решение задачи* (8), (23), (24) *является классическим решением* $u(\boldsymbol{x}) = v(\boldsymbol{y})$ *задачи* (1), (21), (22).

Доказывается теорема 4 аналогично теореме 1.

Так как u – классическое решение задачи (1), (21), (22), то

$$\psi^{(1)}(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \psi^{(2)}(\boldsymbol{x}^{(0)}). \tag{25}$$

Следовательно, и для решения задачи (8), (23), (24) имеем условие согласования

$$\xi^{(1)}(y_1^{(0)}) = \xi^{(2)}(C^{(0)}). \tag{26}$$

Условия согласования (25) (условие (26)) являются не только необходимым, но и достаточным условием существования классического решения задачи (1), (21), (22) (задачи (8), (23), (24)). Достаточность этих условий будет доказана при исследовании классического решения задачи (8), (23), (24).

Таким образом, рассматриваем классическое решение задачи (8), (23), (24).

Вводим дополнительные обозначения и функции следующим образом:

$$\partial_{y_1} v(\boldsymbol{y}) = w^{(1)}(\boldsymbol{y}), \quad \partial_{y_2} v(\boldsymbol{y}) = w^{(2)}(\boldsymbol{y}).$$

Теперь уравнение (8) в новых обозначениях запишется в виде

$$\partial_{y_2} w^{(1)} + \mathcal{L}^{(2)}(\boldsymbol{y}, v, w^{(1)}, w^{(2)}) = g(\boldsymbol{y}), \tag{27}$$

или

$$\partial_{y_1} w^{(2)} + \mathcal{L}^{(2)}(\boldsymbol{y}, v, w^{(1)}, w^{(2)}) = g(\boldsymbol{y}). \tag{28}$$

Запишем уравнения (27), (28) в интегральном виде через функции $w^{(1)}$ и $w^{(2)}$, используя условия (23), (24). В результате получим систему интегральных уравнений второго рода

$$\begin{gathered} w^{(1)}(\boldsymbol{y}) = \mathrm{d}\xi^{(2)}(y_1) + \int\limits_{C^{(0)}}^{y_2} (g(y_1, z) - \mathcal{L}^{(2)}(y_1, z, v(y_1, z), w^{(1)}(y_1, z), w^{(2)}(y_1, z)))\mathrm{d}z, \\ w^{(2)}(\boldsymbol{y}) = \mathrm{d}\xi^{(1)}(y_2) + \int\limits_{\nu^{-1}(y_1)}^{y_1} (g(z, y_2) - \mathcal{L}^{(2)}(z, y_2, v(z, y_2), w^{(1)}(z, y_2), w^{(2)}(z, y_2)))\mathrm{d}z, \\ v(\boldsymbol{y}) = \xi^{(2)}(y_2) + \int\limits_{C^{(0)}}^{y_2} w^{(2)}(y_1, z)\mathrm{d}z. \end{gathered} \tag{29}$$

Вместо последнего уравнения в системе (29) можно рассматривать уравнение

$$v(\boldsymbol{y}) = \xi^{(1)}(y_1) + \int\limits_{\nu^{-1}(y_1)}^{y_1} w^{(1)}(z, y_2)\mathrm{d}z.$$

Теорема 5. *Задача* (8), (23), (24) *и система уравнений* (29) *эквивалентны, если* $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $w^{(1)}, w^{(2)}$, a, b, c, $\mathcal{L}^{(1)}$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $\psi^{(j)} \in C^2(\mathbb{R})$, $j = 1, 2$.

Теорема 6. *Если* $a, b, c, \mathcal{L}^{(1)}, f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $\psi^{(j)} \in C^2(\mathbb{R})$, $j = 1, 2$, *то единственное решение* $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $w^{(1)}, w^{(2)} \in C^1(\mathbb{R}^2)$ *системы уравнений* (29) *существует, а функция* v *является решением задачи* (8), (23), (24), *тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования* (26).

Доказательство. Применим метод последовательных приближений. За нулевое приближение системы (29) возьмем $w_0^{(1)} = \mathrm{d}\xi^{(2)}$, $w_0^{(2)} = \mathrm{d}\xi^{(1)}$, $v_0 = \xi^{(2)}$. Следующие приближения вычисляются по формуле

$$\begin{gathered}
w_k^{(1)}(\boldsymbol{y}) = \mathrm{d}\xi^{(2)}(y_1) + \int\limits_{C^{(0)}}^{y_2} (g(y_1, z) - \mathcal{L}^{(2)}(y_1, z, v_{k-1}(y_1, z), w_{k-1}^{(1)}(y_1, z), w_{k-1}^{(2)}(y_1, z)))\mathrm{d}z, \\
w_k^{(2)}(\boldsymbol{y}) = \mathrm{d}\xi^{(1)}(y_2) + \int\limits_{\nu^{-1}(y_1)}^{y_1} (g(z, y_2) - \mathcal{L}^{(2)}(z, y_2, v_{k-1}(z, y_2), w_{k-1}^{(1)}(z, y_2), w_{k-1}^{(2)}(z, y_2)))\mathrm{d}z, \qquad (30) \\
v_k(\boldsymbol{y}) = \xi^{(2)}(y_2) + \int\limits_{C^{(0)}}^{y_2} w_{k-1}^{(2)}(y_1, z)\mathrm{d}z, \quad k = 1, 2, \ldots .
\end{gathered}$$

Пусть $\Omega^{(\lambda)} \subset \mathbb{R}^2$, $\lambda = 1, 2, \ldots$, – подобласти в $\mathbb{R}^2$ такие, что $\bigcup\limits_{\lambda=1}^{\infty} \Omega^{(\lambda)} = \mathbb{R}^2$, $\Omega^{(\lambda)} \subset \Omega^{(\tilde{\lambda})}$, $\lambda < \tilde{\lambda}$, $\overline{\Omega^{(\lambda)}}$ – компактное множество в $\mathbb{R}^2$. Докажем равномерную сходимость последовательностей $\{w_k^{(1)}, w_k^{(2)}, v_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $\overline{\Omega^{(\lambda)}}$.

Путем вычитания предыдущего приближения из последующего получим соотношения

$$\begin{gathered}
w_{k+1}^{(1)} - w_k^{(1)} = -\int\limits_{C^{(0)}}^{y_2} (\mathcal{L}^{(2)}(y_1, z, v_k(y_1, z), w_k^{(1)}(y_1, z), w_k^{(2)}(y_1, z)) - \\
-\mathcal{L}^{(2)}(y_1, z, v_{k-1}(y_1, z), w_{k-1}^{(1)}(y_1, z), w_{k-1}^{(2)}(y_1, z)))\mathrm{d}z, \\
w_{k+1}^{(2)} - w_k^{(2)} = -\int\limits_{\nu^{-1}(y_1)}^{y_1} (\mathcal{L}^{(2)}(z, y_2, v_k(z, y_2), w_k^{(1)}(z, y_2), w_k^{(2)}(z, y_2)) - \qquad (31) \\
-\mathcal{L}^{(2)}(z, y_2, v_{k-1}(z, y_2), w_{k-1}^{(1)}(z, y_2), w_{k-1}^{(2)}(z, y_2)))\mathrm{d}z, \\
v_{k+1} - v_k = \int\limits_{C^{(0)}}^{y_2} (w_k^{(2)} - w_{k-1}^{(2)})(y_1, z)\mathrm{d}z, \quad k = 1, 2, \ldots .
\end{gathered}$$

Покажем, что разности $|w_{k+1}^{(1)} - w_k^{(1)}|$, $|w_{k+1}^{(2)} - w_k^{(2)}|$, $|v_{k+1} - v_k|$ удовлетворяют неравенствам

$$|w_{k+1}^{(1)} - w_k^{(1)}|, \ |w_{k+1}^{(2)} - w_k^{(2)}|, \ |v_{k+1} - v_k| \leqslant L^k B \frac{(y_1 + y_2 - C^{(0)} - \nu^{-1}(y_1))^k}{k!}, \quad k = 1, 2, \ldots, \qquad (32)$$

где B – некоторая постоянная. При $k = 0$ неравенство (32) легко проверяется, так как

$$\begin{gathered}
w_1^{(1)} - w_0^{(1)} = -\int\limits_{C^{(0)}}^{y_2} \mathcal{L}^{(2)}(y_1, z, \xi^{(2)}(y_1, z), \mathrm{d}\xi^{(2)}(y_1, z), \mathrm{d}\xi^{(1)}(y_1, z))\mathrm{d}z, \\
w_1^{(2)} - w_0^{(2)} = -\int\limits_{\nu^{-1}(y_1)}^{y_1} \mathcal{L}^{(2)}(z, y_2, \xi^{(2)}(z, y_2), \mathrm{d}\xi^{(2)}(z, y_2), \mathrm{d}\xi^{(1)}(z, y_2))\mathrm{d}z, \qquad (33) \\
v_1 - v_0 = \int\limits_{C^{(0)}}^{y_2} \mathrm{d}\xi^{(1)}(z)\mathrm{d}z.
\end{gathered}$$

Оценка (32) сразу видна, если выбрать в (33) число B достаточно большим, которое зависит от функций $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$, $\mathcal{L}^{(2)}$ и размера области $\Omega^{(\lambda)}$. Из (31) для $k = 1, 2, \ldots$ имеем

$$|w_{k+1}^{(1)}-w_k^{(1)}|\leqslant\int\limits_{C^{(0)}}^{y_2}L^{k-1}B\frac{(y_1+z-C^{(0)}-\nu^{-1}(y_1))^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{d}z\leqslant L^kB\frac{(y_1+z-C^{(0)}-\nu^{-1}(y_1))^{k}}{k!}\Big|_{C^{(0)}}^{y_2}\leqslant$$

$$\leqslant L^kB\frac{(y_1+y_2-C^{(0)}-\nu^{-1}(y_1))^{k}}{k!}.$$

Аналогично оцениваются разности $|w_{k+1}^{(2)}-w_k^{(2)}|$ и $|v_{k+1}-v_k|$. Заметим, что

$$w_k^{(1)}=w_0^{(1)}+\sum_{j=1}^{k}(w_j^{(1)}-w_{j-1}^{(1)}),\quad w_k^{(2)}=w_0^{(2)}+\sum_{j=1}^{k}(w_j^{(2)}-w_{j-1}^{(2)}),\quad v_k=v_0+\sum_{j=1}^{k}(v_j-v_{j-1}).$$

Из оценок (32) следует абсолютная и равномерная сходимость рядов

$$w_0^{(1)}+\sum_{k=1}^{\infty}(w_k^{(1)}-w_{k-1}^{(1)}),\quad w_0^{(2)}+\sum_{k=1}^{\infty}(w_k^{(2)}-w_{k-1}^{(2)}),\quad v_0+\sum_{k=1}^{\infty}(v_k-v_{k-1})$$

на компактном множестве $\overline{\Omega^{(\lambda)}}$, члены которых по абсолютной величине меньше членов равномерно сходящегося ряда

$$B+B\sum_{k=0}^{\infty}L^k\frac{(y_1+y_2-C^{(0)}-\nu^{-1}(y_1))^{k}}{k!}=B(1+e^{L(y_1+y_2-C^{(0)}-\nu^{-1}(y_1))}).$$

Таким образом, последовательные приближения $\{w_k^{(1)},w_k^{(2)},v_k\}$ на $\overline{\Omega^{(\lambda)}}$ равномерно стремятся к непрерывным функциям $w^{(1)},w^{(2)},v:\mathbb{R}^2\supset\overline{\Omega^{(\lambda)}}\ni\boldsymbol{y}\to w^{(1)}(\boldsymbol{y}),w^{(2)}(\boldsymbol{y}),v(\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}$ соответственно. Переходя к пределу в (30) [11] при $k\to\infty$, получим, что $w_k^{(1)},w_k^{(2)},v_k$ являются решением системы (29).

Докажем единственность решения. Предположим, что существуют два решения системы (29) $w^{(1)},w^{(2)},v$ и $W^{(1)},W^{(2)},V$, $\widetilde{w}^{(1)}=W^{(1)}-w^{(1)}$, $\widetilde{w}^{(2)}=W^{(2)}-w^{(2)}$, $\tilde{v}=V-v$. Тогда

$$\widetilde{w}^{(1)}=-\int\limits_{C^{(0)}}^{y_2}(\mathcal{L}^{(2)}(y_1,z,V(y_1,z),W^{(1)}(y_1,z),W^{(2)}(y_1,z))-\mathcal{L}^{(2)}(y_1,z,v(y_1,z),w^{(1)}(y_1,z),w^{(2)}(y_1,z)))\mathrm{d}z,$$

`

$$\widetilde{w}^{(2)}=-\int\limits_{\nu^{-1}(y_1)}^{y_1}(\mathcal{L}^{(2)}(z,y_2,V(z,y_2),W^{(1)}(z,y_2),W^{(2)}(z,y_2))-\qquad(34)$$

$$-\mathcal{L}^{(2)}(z,y_2,v(z,y_2),w^{(1)}(z,y_2),w^{(2)}(z,y_2)))\mathrm{d}z,$$

$$\tilde{v}=\int\limits_{C^{(0)}}^{y_2}\widetilde{w}^{(2)}(y_1,z)\mathrm{d}z.$$

Функции $\widetilde{w}^{(1)},\widetilde{w}^{(2)},\tilde{v}\in C(\overline{\Omega^{(\lambda)}})$. Поэтому $|\widetilde{w}^{(1)}|,|\widetilde{w}^{(2)}|,|\tilde{v}|\leqslant D$, D – некоторая постоянная. Из (33) имеем

$$|\widetilde{w}^{(1)}(\boldsymbol{y})|\leqslant\int\limits_{C^{(0)}}^{y_2}LD\mathrm{d}z\leqslant LD(y_1-\nu^{-1}(y_1))\leqslant LD\frac{y_1+y_2-\nu^{-1}(y_1)-C^{(0)}}{1!}.$$

Такие же оценки справедливы и для $\widetilde{w}^{(2)}$ и $\tilde{v}$. Применяя метод математической индукции, получим

$$|\widetilde{w}^{(1)}|,\ |\widetilde{w}^{(2)}|,\ |\tilde{v}|\leqslant L^kD\frac{(y_1+y_2-\nu^{-1}(y_1)-C^{(0)})^k}{k!}$$

для любого натурального k и любого $\boldsymbol{y}\in\overline{\Omega^{(\lambda)}}$. Отсюда следует, что $\widetilde{w}^{(1)}\equiv\widetilde{w}^{(2)}\equiv\tilde{v}\equiv0$ в $\overline{\Omega^{(\lambda)}}$, если перейти к пределу при $k\to\infty$.

Таким образом, мы доказали утверждение теоремы 6 для системы (29) в подобласти $\Omega^{(\lambda)}$. Поскольку система $\{\Omega^{(\lambda)}\}_{\lambda=1}^{\infty}$ является покрытием плоскости $\mathbb{R}^2$, то отсюда получаем доказываемое утверждение теоремы 6 для системы (29). Достаточность условий согласования (26) следует из интегрального представления системы (29). Из предыдущего доказательства следует, что функции v, $w^{(1)}$, $w^{(2)}$ из класса непрерывных функций на всей плоскости $\mathbb{R}^2$. Поскольку эти функции являются решениями систем (29) и эквивалентной ей и эти системы интегральных уравнений Вольтерры второго рода, то отсюда очевидно следует, что $w^{(j)} \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $j = 1, 2$, а $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Теорема 6 доказана.

Аналогичным образом рассматриваются задачи для уравнения (1) в областях $Q^{(1)}$ и $Q^{(2)}$ (см. рис. 5 и 6 соответственно) и доказываются теоремы, аналогичные теоремам 1–3 и 4–6.

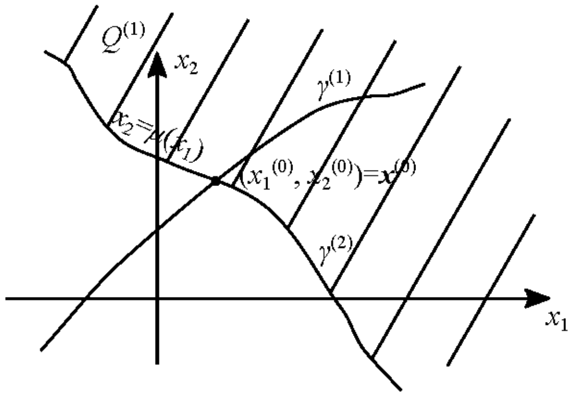

Рис. 5

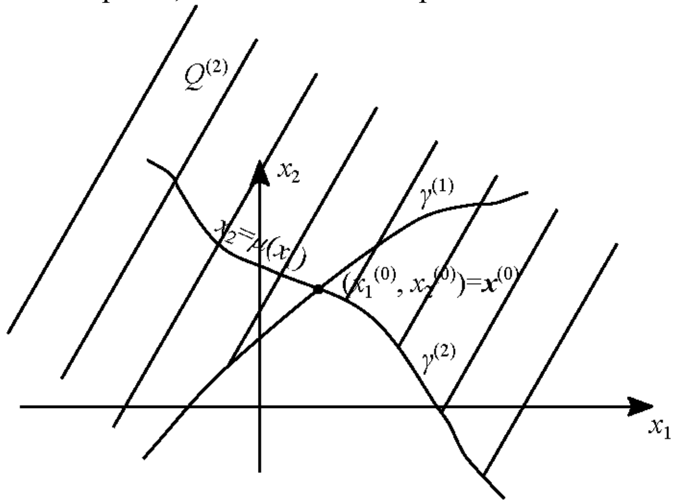

Рис. 6

Литература

1. *Корзюк В. И.* Уравнения математической физики. М.: Ленанд, 2021.

2. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970.

3. *Корзюк В. И., Ковнацкая О. А.* Решения задач для волнового уравнения с условиями на характеристиках // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2021. Т. 57, № 2. С. 148–155.

4. *Корзюк В. И., Ковнацкая О. А., Сериков В. П.* Задачи для одномерного волнового уравнения с условиями на характеристиках и нехарактеристических линиях // Тр. Ин-та математики. 2021. Т. 29, № 1–2. С. 94–100.

5. *Корзюк В. И., Ковнацкая О. А., Севастюк В. А.* Задача Гурса на плоскости для квазилинейного гиперболического уравнения // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. 2022. Т. 66, № 4. С. 391–396.

6. *Корзюк В. И., Столярчук И. И.* Классическое решение первой смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка в криволинейной полуполосе с переменными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53, № 1. С. 77–88.

7. *Миронов А. Н.* К методу Римана решения одной смешанной задачи // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2007. № 2. С. 27–32.

8. *Наумов О. Ю.* Задача для уравнения колебания струны с производными по нормали на нехарактеристических частях границы треугольника и специальным условием сопряжения на характеристике // Научные доклады ежегодной межвузовской 55 Научной конференции СамГПУ. Самара, 2001. С. 58–61.

9. *Koeber M.* Inclusion of solutions of initial value problems for quasilinear hyperbolic equations // Math. Res. 1995. Vol. 89. P. 132–137.

10. *Корзюк В. И., Козловская И. С.* Классические решения задач для гиперболических уравнений: курс лекций: в 10 ч. Минск: БГУ, 2017–2023. Ч. 1–4.

11. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. Санкт-Петербург: Лань, 2023. Т. 1–3.

V. I. Korzyuk, O. A. Kovnatskaya

Picard problem on the plane for a quasilinear hyperbolic equation of the second order

Summary

Classical solutions of problems for a quasilinear hyperbolic equation of the second order in the case of two independent variables with given conditions for the desired function in combination both on characteristic lines and on non-characteristic lines are obtained in the paper. The problems are reduced to a system of equations with a completely continuous operator. Solutions are constructed using the method of successive approximations. In addition, for each problem considered, the uniqueness of the resulting classical solution is shown. Necessary and sufficient matching conditions of given functions are proved in the case of each of the problems considered in the paper, under which classical solutions exist in the presence of a certain smoothness of the given functions.